

2 デジタル無線通信の基礎

2.1 信号

図 2.1 に示すように，信号電圧 $g(t)$ が時刻 $[t_1, t_2]$ に存在するとき，その区間における信号のエネルギー E_g ，および信号の電力 P_g は定義より次式で与えられる。

$$E_g = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|g(t)|^2}{R} dt \quad (2.1)$$

$$P_g = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{|g(t)|^2}{R} dt \quad (2.2)$$



図 2.1 信号電圧 $g(t)$

ここで R は負荷抵抗であり，通信の教科書では通常 $R = 1\Omega$ として解析される。これにより式が簡略になり，また， $g(t)$ を電流と考えてもよくなる。以下において，特に断らない場合は $R = 1\Omega$ として解析を行う。信号は，以下の条件により，エネルギー信号または電力信号と呼ばれる。たとえば，単一パルス信号はエネルギー信号であり，熱雑音や周期信号は電力信号である。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt \quad \text{が有限値} \rightarrow \text{エネルギー信号} \quad (2.3)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt \quad \text{が 0 でない有限値} \rightarrow \text{電力信号} \quad (2.4)$$

ここで、信号をベクトルとの比較で考察する。図 2.2 に示すように、ベクトル $\mathbf{g}$ をベクトル $\mathbf{x}$ を用いて $\mathbf{g} \approx a\mathbf{x}$ と近似することを考える。この時、 $\mathbf{g}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{g} = a\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2.5)$$

ここで、 $\mathbf{e}$ は誤差ベクトル、 a は係数（スカラー）である。

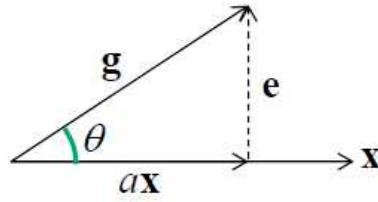


図 2.2 ベクトル $\mathbf{g}$ をベクトル $\mathbf{x}$ で近似

$\mathbf{e}$ がもっとも小さくなるのは $\mathbf{x}$ と $\mathbf{e}$ が直交している場合、すなわち、 $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} = 0$ の場合である。この時、 a は次式で与えられる。

$$a = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \quad (2.6)$$

次に、ベクトルの概念を信号に拡張する。すなわち、信号 $g(t)$ を区間 $[t_1, t_2]$ にわたり関数 $x(t)$ で近似するものとして、以下の関係を与える。

$$\mathbf{g} \rightarrow g(t) \quad \mathbf{x} \rightarrow x(t) \quad \mathbf{g} \cong a\mathbf{x} \rightarrow g(t) \cong ax(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (2.7)$$

さらに、ベクトルの内積は以下で与えられるとする。

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)^* dt \quad |\mathbf{x}|^2 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (2.8)$$

この時、 a は次式で与えられる。

$$a = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)^* dt}{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt} \quad (2.9)$$

次に、信号間の相関について述べる。図 2.3 において、ベクトル $\mathbf{g}$ と $\mathbf{x}$ の類似度はベクトルの大きさでなく、角度 θ で評価され、以下の関係で与えられる。

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{g}| |\mathbf{x}| \cos \theta \quad (2.10)$$

$$-1 \leq C_r = \cos \theta = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{g}| |\mathbf{x}|} \leq 1 \quad (2.11)$$

ここで、 C_r は相関係数とよばれる。

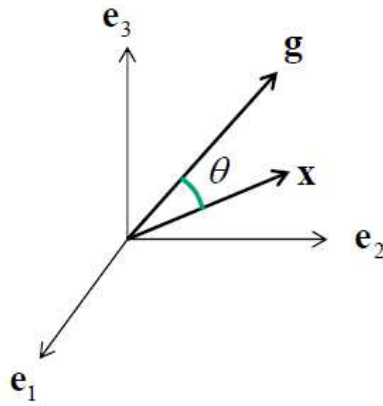


図 2.3 ベクトル $\mathbf{g}$ と $\mathbf{x}$ の類似度

上の関係を信号に拡張して、相関係数 C_r を次式で与える。

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)^* dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 dt \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}} \quad (2.12)$$

ここで、 C_r は複素数であり、相関は $|C_r|$ の値で評価される。また、 C_r は信号の大きさで規格化されており、信号の大きさには依存しない。

$|C_r|=1$ の時、ベクトルの場合の $\theta=0, \pi$ に対応し、信号 $g(t)$ と $x(t)$ は最大の相関を有するという。一方、 $|C_r|=0$ の時、ベクトルの場合の $\theta=\pm\pi/2$ に対応し、信号 $g(t)$ と $x(t)$ は直交しており、互いに無相関であるという。

2.2 直交信号空間とフーリエ級数

正規直交する信号からなる集合 $\{e_n(t)\}$ を考える。正規直交とは以下の関係を満たすことを意味する。

$$\int_{t_1}^{t_2} e_m(t) e_n(t)^* dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (2.13)$$

信号 $g(t)$ を、正規直交信号 $\{e_n(t)\}$ を用いて以下の近似式で与えるものとする。

$$\left. \begin{aligned} g(t) &\cong \sum_{n=1}^N c_n e_n(t) & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ c_n &= \int_{t_1}^{t_2} g(t) e_n(t)^* dt \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

さらに、次式の等号が成り立つ（誤差ベクトルが無い）時、上記直交集合は完全集合となっている。

$$g(t) = \sum_{n=1}^N c_n e_n(t) \quad (2.15)$$

この時、誤差エネルギーは0となり、信号 $g(t)$ のエネルギーは、次式のように

直交成分 $c_n e_n(t)$ のエネルギーの和で与えられる。

$$E_g = \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \quad (2.16)$$

ここで, $\sum_{n=1}^N c_n e_n(t)$ は, $g(t)$ の一般化フーリエ級数とよばれる。

信号 $g(t)$ が周期 T_0 ($\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) の周期信号である時, 基本周期 T_0 の三角

関数を直交信号として用いた次式のフーリエ級数で表すことができる。これは三角関数のフーリエ級数とよばれる。

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \\ a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) dt & a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} g(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} g(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

また, 基本周期 T_0 の指数関数を直交信号として用いた次式のフーリエ級数で表すこともできる。これは, 指数関数のフーリエ級数とよばれる。

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\ D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

2.3 非周期信号のフーリエ変換

信号が非周期信号の場合，前節のようなフーリエ級数を用いて表すことはできない。このような非周期信号の解析には，フーリエ変換が用いられる。

非周期信号 $g(t)$ を周期 T_0 ごとに繰り返して作られる新たな周期信号 $g_{T_0}(t)$ を考える。この様子を図 2.4 に示す。

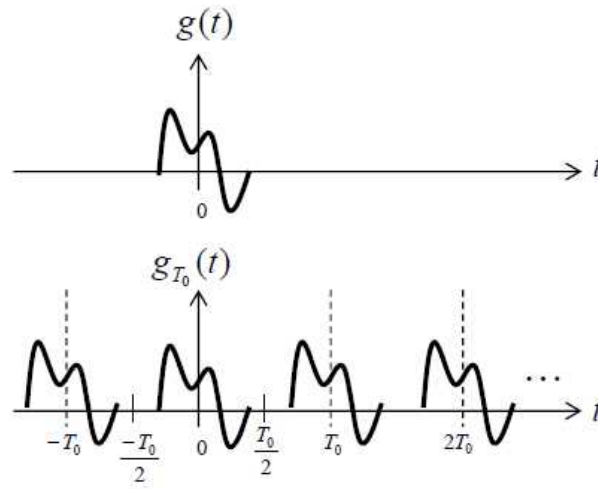


図 2.4 非周期信号 $g(t)$ から作られる周期信号 $g_{T_0}(t)$

$g_{T_0}(t)$ は周期 $T_0 (= 2\pi / \omega_0)$ の周期信号なので，指数関数のフーリエ級数を用いて次式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} g_{T_0}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\ D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$[-T_0/2, T_0/2]$ にわたる $g_{T_0}(t)$ の積分は， $[-\infty, \infty]$ にわたる $g(t)$ の積分と等しいので，以下となる。

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.20)$$

ここで、次式で表される ω に関する連続関数 $G(\omega)$ を導入する。

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.21)$$

この時、

$$D_n = \frac{1}{T_0} G(n\omega_0) \quad (2.22)$$

これから、

$$g_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (2.23)$$

ここで、 $T_0 \rightarrow \infty$, $\frac{2\pi}{T_0} = \omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_{T_0}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.24)$$

これから、以下のフーリエ変換公式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \mathfrak{F}[g(t)] \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathfrak{F}^{-1}[G(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

さらに、 $\omega = 2\pi f$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathfrak{F}[g(t)] \\ g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df = \mathfrak{F}^{-1}[G(f)] \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

ここで、 $\mathfrak{F}[\]$ はフーリエ変換を、 $\mathfrak{F}^{-1}[\]$ は逆フーリエ変換を意味する。

2.4 負周波数と複素信号

通信技術を学ぶ時、負の周波数と複素信号^[5]が必ず出てくる。これらの概念を正しく理解しておくことが通信技術を学ぶ上で重要である。

周波数は1秒間あたりの振動の数として与えられ、通常は正の値であるとされる。しかし、通信技術を学ぶ時、正の周波数だけでなく負の周波数の存在も考慮する必要がある。

例えば、角周波数 ω_k の信号 $\cos(\omega_k t)$ を考える時、これをフーリエ変換して求める周波数応答（スペクトル）は次式で与えられ、また、図2.5のように図示される。

$$\mathfrak{F}[\cos(\omega_k t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_k t) e^{-j\omega t} dt = \pi\delta(\omega - \omega_k) + \pi\delta(\omega + \omega_k) \quad (2.27)$$

$\delta(\)$ はデルタ関数（デルタ関数については付録A参照）

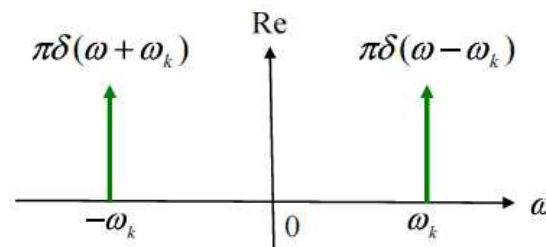


図 2.5 信号 $\cos(\omega_k t)$ のフーリエ変換による周波数応答（スペクトル）

式 (2.27) および図 2.5 からわかるように、信号 $\cos(\omega_k t)$ は角周波数 ω_k (正周波数) と $-\omega_k$ (負周波数) にインパルス状 (デルタ関数) のスペクトル成分を有している。すなわち、負の周波数成分が存在している。

実際の信号の中に確かに存在するらしい負の周波数をどのように理解したら良いであろうか。まず、角速度 ω_k で回転する複素信号 $e^{j\omega_k t}$ を考えることから始める。図 2.6 に複素平面上を複素信号 $e^{j\omega_k t}$ が時間とともに変化する軌跡の様子を示す。なおこの図では、上下方向に実軸を、左右方向に虚軸を取って示している。信号軌跡は、時刻 $t=0$ 時に実数1となっており、時間経過とともに半径1、角速度 ω_k で回転する。 $\omega_k \geq 0$ の場合には、時間経過とともに左回転 (正回転) し、それをここでは正周波数と呼ぶ。

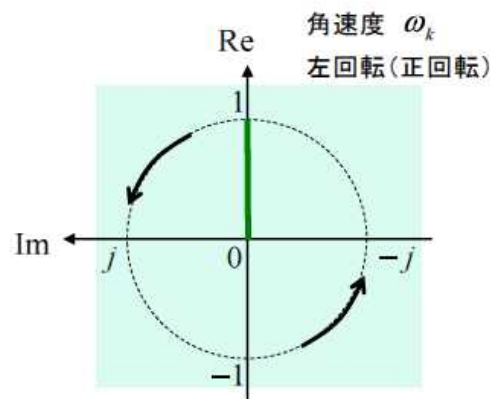


図 2.6 複素信号 $e^{j\omega_k t}$ の軌跡の様子

次に複素信号 $e^{-j\omega_k t}$ ($\omega_k \geq 0$) を考える。図 2.7 に複素平面上を複素信号 $e^{-j\omega_k t}$ が時間とともに変化する軌跡の様子を示す。この場合の信号軌跡は、時刻 $t=0$ 時に実数1の値となり、時間経過とともに半径1、角速度 $-\omega_k$ で回転する。この場合には時間経過とともに右回転 (負回転) し、これをここでは負周波数と呼ぶ。

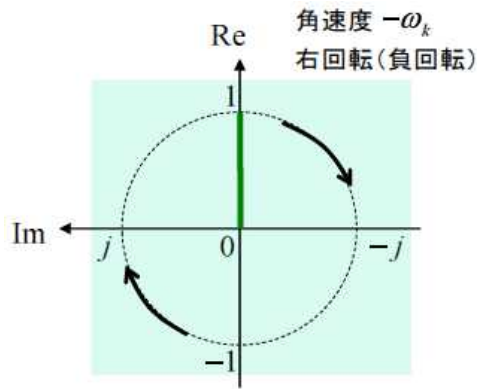


図 2.7 複素信号 $e^{-j\omega_k t}$ の軌跡の様子

次に角周波数 ω_k で振動する信号 $\cos(\omega_k t)$ を再び考える。これはオイラーの公式から指数関数を用いて次式で与えられる。

$$\cos(\omega_k t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_k t} \quad (2.28)$$

図 2.6 および図 2.7 を参考にして、図 2.8 に信号 $\cos(\omega_k t)$ の軌跡の様子を示す。

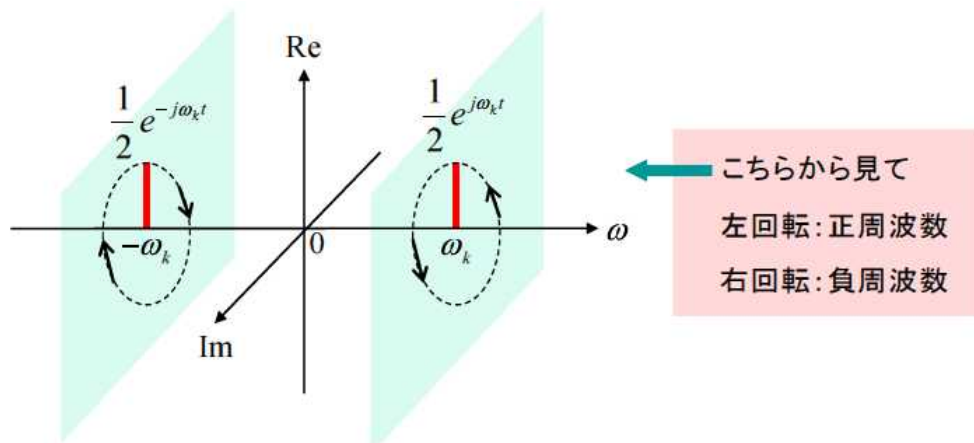


図 2.8 信号 $\cos(\omega_k t)$ の軌跡の様子

図は ω 軸上の ω_k および $-\omega_k$ の点に ω 軸に垂直となる複素平面をそれぞれ考え、それらの複素平面上に複素信号 $\frac{1}{2}e^{j\omega_k t}$ および $\frac{1}{2}e^{-j\omega_k t}$ の軌跡が描かれたものとなっている。複素信号 $\frac{1}{2}e^{j\omega_k t}$ は時刻 $t=0$ 時に実数 $\frac{1}{2}$ の値となり、時間経過とともに半径 $\frac{1}{2}$ 、角速度 ω_k で回転する。その回転は矢印方向（図の右側）から見て、左回転（正回転、正周波数）となっている。一方、複素信号 $\frac{1}{2}e^{-j\omega_k t}$ は時刻 $t=0$ 時に実数 $\frac{1}{2}$ の値となり、時間経過とともに半径 $\frac{1}{2}$ 、角速度 $-\omega_k$ で回転する。その回転は矢印方向（図の右側）から見て、右回転（負回転、負周波数）となっている。これら2つの複素信号は、すべての時刻において互いに複素共役の関係にあり、その虚数成分は相殺されて0となり、実数成分の和が $\cos(\omega_k t)$ の振動として観測される。複素信号において ω_k は回転の角速度として与えたが、これは角周波数でもあり、両者は同じものである（角速度=1秒あたり位相変化量= $2\pi \times$ 周波数=角周波数）。図2.5と図2.8の比較から、図2.5に示されるインパルス状のスペクトル成分は図2.8に示される複素信号の回転および時刻 $t=0$ 時の値と対応しているといえる。

次に、角周波数 ω_k の信号 $\sin(\omega_k t)$ を考える。 $\sin(\omega_k t)$ は $\cos(\omega_k t)$ の位相を $-\frac{\pi}{2}$ 回転したものであり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\sin(\omega_k t) &= \cos(\omega_k t - \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{2}e^{j(\omega_k t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}e^{-j(\omega_k t - \frac{\pi}{2})} = -\frac{j}{2}e^{j\omega_k t} + \frac{j}{2}e^{-j\omega_k t}\end{aligned}\tag{2.29}$$

図2.8にならって、図2.9に信号 $\sin(\omega_k t)$ の軌跡の様子を示す。

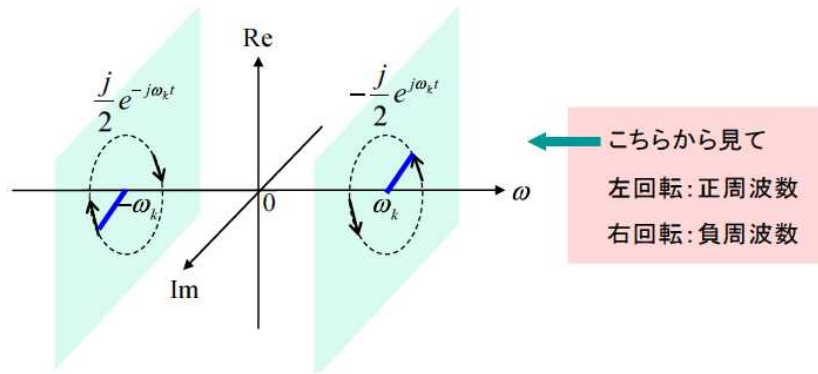


図 2.9 信号 $\sin(\omega_k t)$ の軌跡の様子

複素信号 $-\frac{j}{2}e^{j\omega_k t}$ は時刻 $t=0$ 時に虚数 $-\frac{j}{2}$ の値となり，時間経過とともに半径 $\frac{1}{2}$ ，角速度 ω_k で左回転（正回転，正周波数）している。一方，複素信号 $\frac{j}{2}e^{-j\omega_k t}$ は時刻 $t=0$ 時に虚数 $\frac{j}{2}$ の値となり，時間経過とともに半径 $\frac{1}{2}$ ，角速度 ω_k で右回転（負回転，負周波数）している。これら 2 つの複素信号は，すべての時刻において互いに複素共役の関係にあり，その虚数成分は相殺されて 0 となり，実数成分の和が $\sin(\omega_k t)$ の振動として観測される。一方，信号 $\sin(\omega_k t)$ をフーリエ変換して求める周波数応答（スペクトル）は次式で与えられ，また，図 2.10 のように図示される。

$$\mathfrak{F}[\sin(\omega_k t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_k t) e^{-j\omega t} dt = -j\pi\delta(\omega - \omega_k) + j\pi\delta(\omega + \omega_k) \quad (2.30)$$

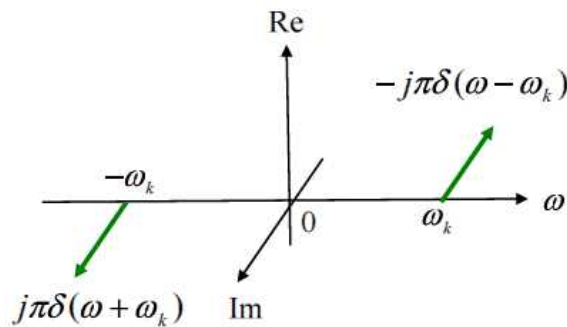


図 2.10 信号 $\sin(\omega_k t)$ のフーリエ変換による周波数応答（スペクトル）

図 2.9 と図 2.10 の比較から、図 2.10 に示されるインパルス状のスペクトル成分は図 2.9 に示される複素信号の回転および時刻 $t=0$ 時の値と対応していることがわかる。この関係は $\cos(\omega_k t)$ の場合と同様といえる。

ここで、角速度 ω_k で回転する複素信号 $e^{j\omega_k t}$ が単体で存在する場合について、もう少し考える。オイラーの公式から $e^{j\omega_k t}$ は以下のように表せる。

$$e^{j\omega_k t} = \cos(\omega_k t) + j \sin(\omega_k t) \quad (2.31)$$

図 2.8 および図 2.9 に示された $\cos(\omega_k t)$ および $\sin(\omega_k t)$ を用い、その和として $e^{j\omega_k t}$ を求めると図 2.11 の様に示される。当然であるが図 2.11 は図 2.6 で示した $e^{j\omega_k t}$ と一致するものである。図 2.11 では ω 軸上の ω_k の点に図 2.6 で描いた $e^{j\omega_k t}$ の図を持ってきたものとなっている。

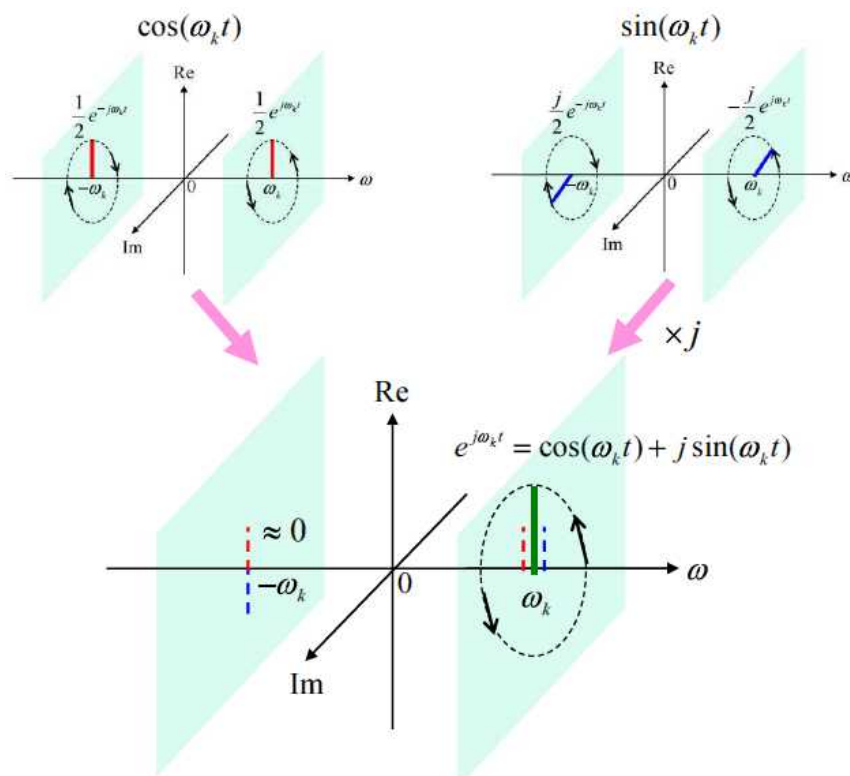


図 2.11 $\cos(\omega_k t)$ と $\sin(\omega_k t)$ の和として与えた $e^{j\omega_k t}$ の軌跡の様子

複素信号 $e^{j\omega_k t}$ をフーリエ変換して求まる周波数応答（スペクトル）は次式で与えられ、また、図 2.12 のように図示される。図 2.11 と図 2.12 の比較から、これまでと同様に両者が対応している様子がわかる。

$$\mathfrak{F}[e^{j\omega_k t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_k) \quad (2.32)$$

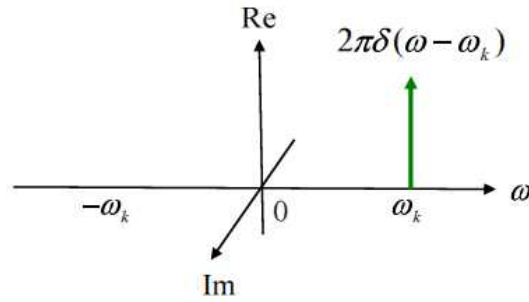


図 2.12 複素信号 $e^{j\omega_k t}$ のフーリエ変換による周波数応答（スペクトル）

次に、複素信号 $d_k e^{j\omega_k t}$ を考える。ここで、 $d_k = a_k + jb_k$ 、 d_k は複素定数、 a_k 、 b_k は実定数である。この軌跡は次式の様に d_k を極座標表示することにより理解が容易になるであろう。図 2.13 に複素信号 $d_k e^{j\omega_k t}$ の軌跡の様子を示す。

$$d_k e^{j\omega_k t} = (a_k + jb_k) e^{j\omega_k t} = r_k e^{j\theta_k} e^{j\omega_k t} \quad (2.33)$$

時刻 $t=0$ 時に複素数 $d_k = a_k + jb_k = r_k e^{j\theta_k}$ の値となり、時間経過とともに半径 r_k 、角速度 ω_k で左回転（正回転，正周波数）している。複素信号を単体で考えると、その複素係数（ $d_k = a_k + jb_k = r_k e^{j\theta_k}$ ）は時刻 $t=0$ 時の値（初期値）、その角周波数（ ω_k ）は回転を与える角速度と考えると理解できる。当然であるが、 $-\omega_k$ であれば右回転（負回転，負周波数）している。

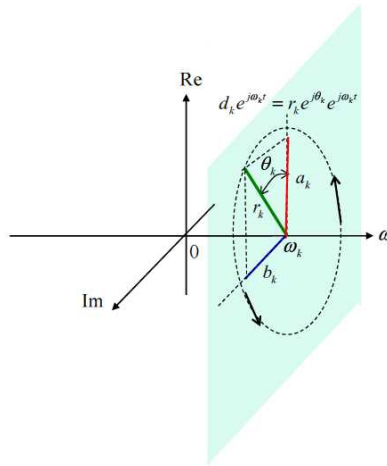


図 2.13 複素信号 $d_k e^{j\omega_k t}$ の軌跡の様子

本節の議論をまとめると，正周波数と負周波数の考えは，解析時に出てくる複素信号の回転を与える角速度と考えることにより理解できよう。一方，実際に存在し観測される正弦波（の和から成る）信号は，複素共役の関係にある正負回転する複素信号対で与えられる。その結果，虚数部分は相殺されて常に 0 となり，実数部分のみを振動として観測することになると考えることができる。さらにまた，実信号の動作は，それを構成する複素信号からその動作を一義的に知ることができる。

2.5 信号の時間応答と周波数応答(スペクトル)

2.5.1 rect関数とsinc関数

図 2.14(a) の時間応答を有する信号の (b) スペクトル (周波数応答) を求める。

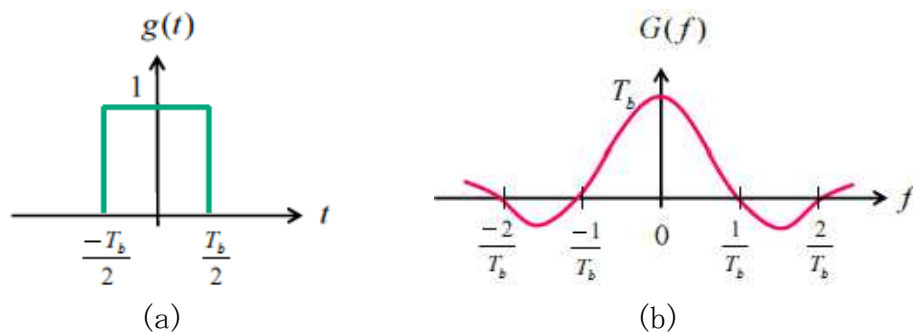


図 2.14 $g(t) = \text{rect}(t/T_b) \Leftrightarrow G(f) = T_b \text{sinc}(\pi T_b f)$

なお、図の時間応答は次式の **rect** 関数で与えられる。

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) \quad (2.34)$$

式(2.34)のフーリエ変換は以下のように **sinc** 関数の周波数応答をする。

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T_b/2}^{T_b/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{j}{2\pi f} \left[e^{-j\pi f T_b} - e^{j\pi f T_b} \right] = \frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f} = T_b \text{sinc}(\pi T_b f) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで、 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

次に、図 2.15(b) のスペクトルを有する信号の (a) 時間応答を求める。なお、図のスペクトルは次式の **rect** 関数で与えられる。

$$G(f) = \text{rect}(fT_b) \quad (2.36)$$

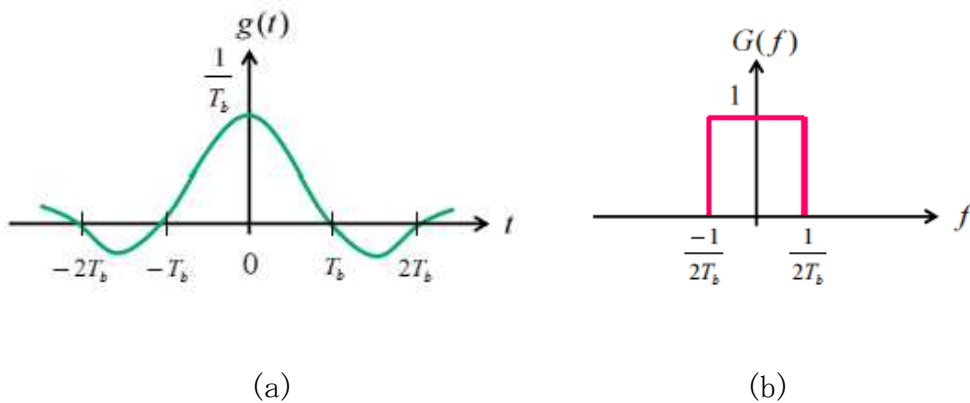


図 2.15 $g(t) = \frac{1}{T_b} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \Leftrightarrow G(f) = \text{rect}(fT_b)$

式(2.36)の逆フーリエ変換は以下のように **sinc** 関数の時間応答をする。

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-1/2T_b}^{1/2T_b} e^{j2\pi ft} df \\
 &= \frac{1}{j2\pi t} \left[e^{j\pi t/T_b} - e^{-j\pi t/T_b} \right] = \frac{\sin(\pi t/T_b)}{\pi t} = \frac{1}{T_b} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_b}\right)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.5.2 周期インパルス列のスペクトル

図 2.16 に示す周期 T_0 のインパルス列 (デルタ関数列) $x(t) = \delta_{T_0}(t)$ を考える (デルタ関数については付録 A 参照)。この時, $x(t)$ は次式で与えられる。

$$x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{2.38}$$

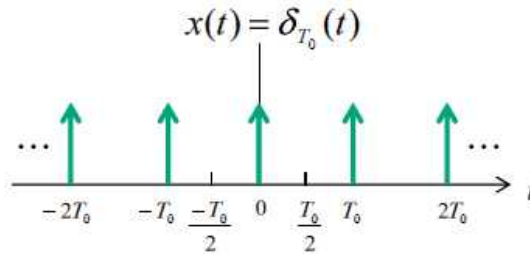


図 2.16 周期 T_0 のインパルス列 $x(t) = \delta_{T_0}(t)$

これは周期関数なので次式のフーリエ級数であらわせる。

$$\left. \begin{aligned}
 x(t) = \delta_{T_0}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\
 D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt
 \end{aligned} \right\} \tag{2.39}$$

ここで, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

積分区間 $[-T_0/2, T_0/2]$ を選び, この区間で $\delta_{T_0}(t) = \delta(t)$ であることを考慮すると

$x(t)$, D_n は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \\ D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

次に $x(t)$ のフーリエ変換を行い, スペクトル $X(\omega)$ を求める。それに先立ち, 以下のフーリエ変換式を導出しておく。

$$\mathfrak{F}^{-1}[\delta(\omega - n\omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{jn\omega_0 t} \quad (2.41)$$

$$e^{jn\omega_0 t} \Leftrightarrow \mathfrak{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \quad (2.42)$$

式(2.42)を用いることにより, $x(t)$ のスペクトル $X(\omega)$ は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathfrak{F}[x(t)] = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[e^{jn\omega_0 t}] \\ &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned} \quad (2.43)$$

図 2.17 に $X(\omega)$ のスペクトルを示す。

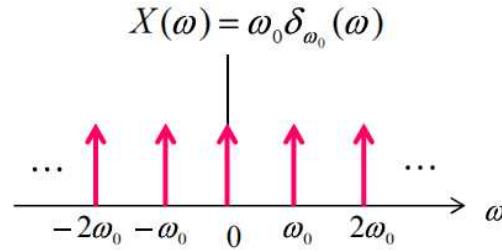


図 2.17 インパルス列 $x(t)$ のスペクトル $X(\omega)$

2.8.3 ミキシング

図 2.18 に信号 $g(t)$ と $x(t)$ のミキシングの様子を示す。図において、 $g(t)$, $x(t)$, $y(t)$ は信号の時間応答, $G(\omega)$, $X(\omega)$, $Y(\omega)$ は, それらをフーリエ変換して得られる信号のスペクトルである。

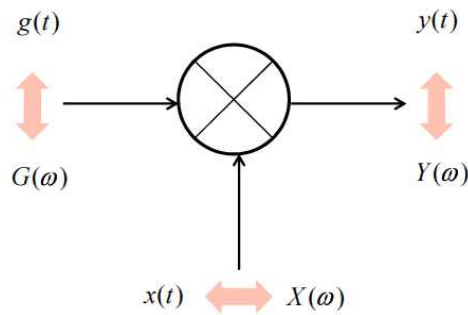


図 2.18 信号 $g(t)$ と $x(t)$ のミキシング

ミキシングでは, 出力信号 $y(t)$ は次式のように入力信号 $g(t)$ と $x(t)$ の積で表すことができる。

$$y(t) = g(t)x(t) \quad (2.44)$$

時間領域における積のフーリエ変換は次式のように周波数領域における畳み込み積分で与えられる (付録 B 参照)。

$$Y(\omega) = G(\omega) \otimes X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) X(\omega - \nu) d\nu \quad (2.45)$$

ここで、 $\otimes$ は畳み込み積分を示す記号

次に、例えば、 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ の場合について調べよう。 $x(t)$ のフーリエ変換による $X(\omega)$ は、式(2.42) の関係を用いると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathfrak{F}(\cos(\omega_0 t)) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right) \\ &= \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

これを式(2.45)に代入して、 $Y(\omega)$ は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)(\delta(\omega - \omega_0 - \nu) + \delta(\omega + \omega_0 - \nu)) d\nu \\ &= \frac{1}{2}(G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0)) \end{aligned} \quad (2.47)$$

図 2.19 に $G(\omega)$, $X(\omega)$, $Y(\omega)$ のスペクトルの様子を示す。 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ とのミキシングにより、出力信号スペクトル $Y(\omega)$ は入力信号スペクトル $G(\omega)$ の中心周波数が ω_0 および $-\omega_0$ に変換されたものになることがわかる。

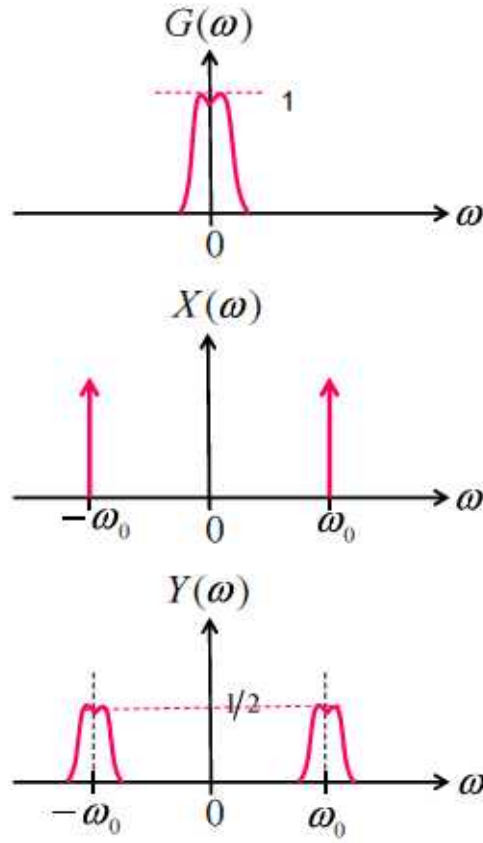


図 2.19 $G(\omega)$, $X(\omega)$, $Y(\omega)$ のスペクトルの様子

2.5.4 サンプリング

図 2.20 に信号 $g(t)$ を周期 $T_0 (= 2\pi / \omega_0)$ でサンプリングする様子を示す。

ここで、 δ 関数の性質を用いると、出力信号 $y(t)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_0) \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - nT_0) \\
 &= g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = g(t) \delta_{T_0}(t) = g(t)x(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

式(2.48)から、入力信号 $g(t)$ を周期 $T_0 (= 2\pi / \omega_0)$ でサンプリングして得られる

出力信号 $y(t)$ は、時間領域で入力信号 $g(t)$ と周期 T_0 のインパルス列 $x(t)$ の積であらわすことができるといえる。

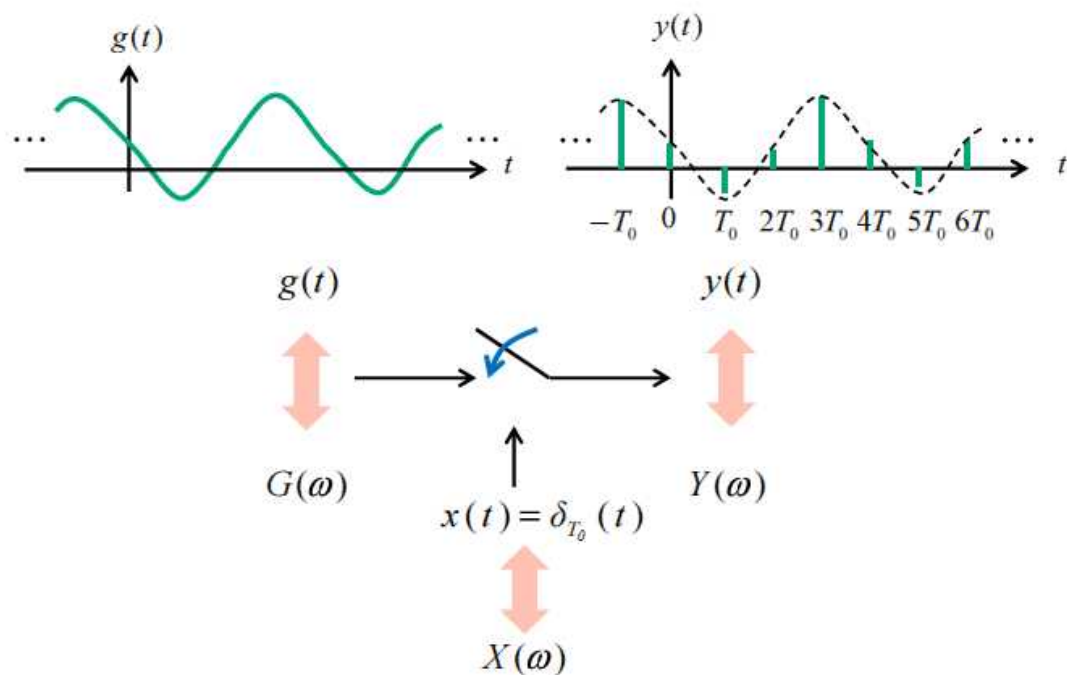


図 2.20 信号 $g(t)$ を周期 $T_0 (= 2\pi / \omega_0)$ でサンプリング

ミキシングの場合と同様に、時間領域における積のフーリエ変換は、周波数領域における畳み込み積分で与えられる。これから、出力信号 $y(t)$ をフーリエ変換して求められるスペクトル $Y(\omega)$ は次式で与えることができる。

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= G(\omega) \otimes X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) X(\omega - \nu) d\nu \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0 - \nu) d\nu \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_0)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

式(2.49)から、出力信号スペクトル $Y(\omega)$ は、入力信号スペクトル $G(\omega)$ が ω_0 の周期で現われたものとなる。この様子を図 2.21 に示す。

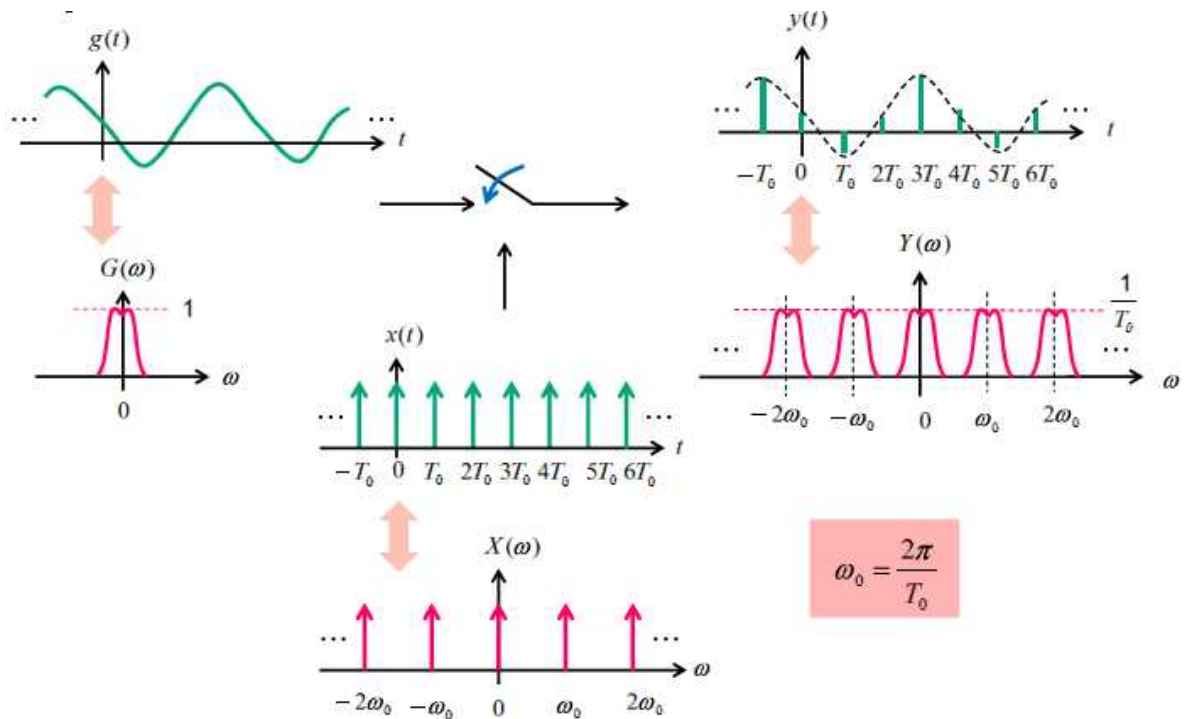


図 2.21 サンプリングによる出力信号の時間応答およびスペクトルの様子

2.5.5 フィルタリング

図 2.22 に伝達関数 $h(t)$ のフィルタで入力信号 $g(t)$ をフィルタリングする様子を示す。

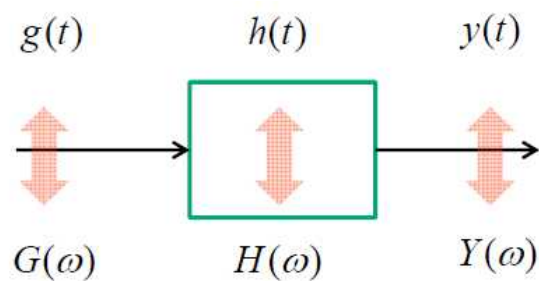


図 2.22 伝達関数 $h(t)$ のフィルタで信号 $g(t)$ をフィルタリング

図において、入力信号のスペクトルが $G(\omega)$ 、フィルタのスペクトル（周波数応答）特性が $H(\omega)$ の時、出力信号のスペクトル $Y(\omega)$ は次式のようにその積で与えられる。

$$Y(\omega) = G(\omega)H(\omega) \quad (2.50)$$

フーリエ変換公式から、周波数領域における積の逆フーリエ変換は、時間領域における畳み込み積分で与えられる（付録 B 参照）。これから、時間領域の出力信号 $y(t)$ は次式で与えることができる。

$$y(t) = g(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.51)$$

特に、入力信号がインパルス $g(t) = \delta(t)$ の時、出力 $y(t)$ は次式で与えられる。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) \quad (2.52)$$

式(2.52)は、フィルタの伝達関数 $h(t)$ が、インパルス $\delta(t)$ を入力した時の出力の時間応答（インパルス応答）として与えられることを示している。

また、次式から、インパルス $\delta(t)$ のスペクトルは全周波数で 1 なので、フィルタのスペクトル $H(\omega)$ は、インパルス入力時の出力スペクトルと等しい。

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{j\omega t} dt = 1 \quad \text{から}$$

$$Y(\omega) = G(\omega)H(\omega) = H(\omega) \quad (2.53)$$

2.5.6 ナイキストフィルタ

図 2.23 にナイキストフィルタの伝達関数 $h(t)$ およびスペクトル $H(f)$ を示す。ロールオフ率 α が 0 のナイキストフィルタは **rect** 関数で与えられ、カットオフ

周波数 $f_b/2 (=1/2T_b)$ の低域通過フィルタとなっている。

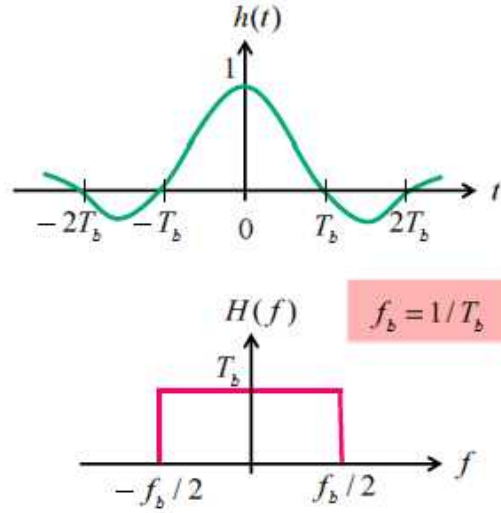


図 2.23 ナイキストフィルタの伝達関数 $h(t)$ およびスペクトル $H(f)$

$H(f) = T_b \text{rect}(fT_b)$ の時, $h(t)$ と $H(f)$ は次式で関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[H(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \text{sinc}\left(\pi \frac{t}{T_b}\right) \\ H(f) &= \mathfrak{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = T_b \text{rect}(fT_b) \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

先のフィルタリングの議論から, ナイキストフィルタのインパルス応答は $h(t)$ となる。図 2.24 に, 周期 T_b のインパルス列からなる入力信号を入力した場合の出力信号の様子を示す。各入力インパルスに対応して **sinc** 関数の形をした出力波形が生じる。ここで, サンプリングのタイミングを nT_b (n は整数) に選ぶと, パルス間の干渉が無いことがわかる。このことは, カットオフ周波数 $f_b/2 (=1/2T_b)$ のナイキストフィルタで帯域制限された信号を用いる場合, 理想

状態では T_b の時間間隔で、信号パルスを互いに干渉することなく送出できることを意味する。言い換えると、毎秒 f_b 個の信号パルスを送出できることを意味する。なお、この時、信号パルスそれぞれの大きさ（符号も含めて）変化させることにより、信号パルスに情報を乗せることができる。

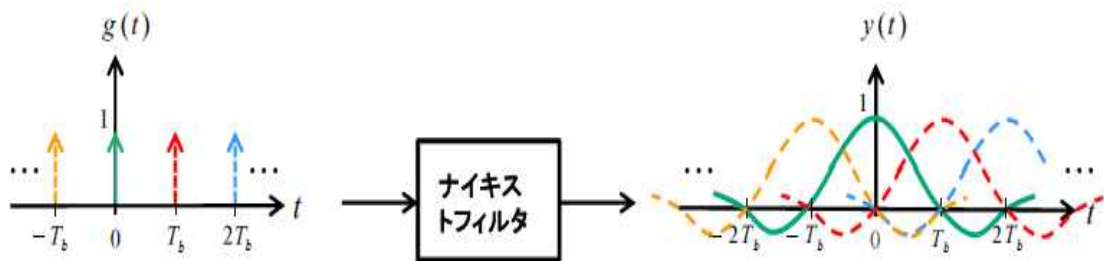


図 2.24 ナイキストフィルタを用いた場合の入出力信号の様子

以上は、ロールオフ率 $\alpha = 0$ のナイキストフィルタについて述べたが、 $0 \leq \alpha \leq 1$ であっても良い。付録 C に $0 \leq \alpha \leq 1$ のナイキストフィルタについて示す。 $\alpha = 0$ に比べて占有帯域が広がる（帯域効率が悪くなる）が、雑音などによる影響を小さくできる利点がある。

2.6 自己相関関数 $R_g(\tau)$ と電力スペクトル密度 $S_g(\omega)$

図 2.25 に示される電圧 $g(t)$ を持つ電力信号を考える。

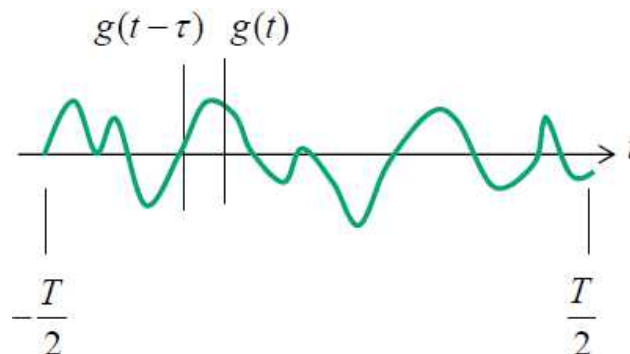


図 2.25 信号電圧 $g(t)$

この時、 $g(t)$ の自己相関関数 $\Re_g(\tau)$ は次式で定義される。

$$\Re_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) g(t-\tau)^* dt \quad (2.55)$$

特に、 $\tau = 0$ の場合

$$\Re_g(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt \quad (2.56)$$

これから、信号電力 P_g は次式で与えられる。

$$P_g = \Re_g(0) \quad (2.57)$$

ここで、 $\Re_g(\tau)$ のフーリエ変換は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \Im[\Re_g(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) g(t-\tau)^* dt \right] d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)^* e^{-j\omega\tau} d\tau \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau \right]^* dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right] G(\omega)^* \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} G(\omega) G(\omega)^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

この時、電力スペクトル密度 (PSD: Power Spectral Density) $S_g(\omega)$ は次式で

与えられる。

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 = \mathfrak{I}(\mathfrak{R}_g(\tau)) \quad (2.59)$$

式(2.59)から、電力信号の自己相関関数 $\mathfrak{R}_g(\tau)$ と電力スペクトル密度 $S_g(\omega)$ は、以下のフーリエ変換で関係付けられる。

$$\left. \begin{aligned} S_g(\omega) &= \mathfrak{I}(\mathfrak{R}_g(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \mathfrak{R}_g(\tau) &= \mathfrak{I}^{-1}[S_g(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

さらに、電力スペクトル密度 $S_g(f)$ を用いる場合は以下となる。

$$\left. \begin{aligned} S_g(f) &= \mathfrak{I}(\mathfrak{R}_g(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_g(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ \mathfrak{R}_g(\tau) &= \mathfrak{I}^{-1}[S_g(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

$S_g(f)$ が電力スペクトル密度であることは以下で検証される。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) df &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) G(\omega)^* d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* g(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = \mathfrak{R}_g(0) = P_g \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.7 ポーラバイナリ信号の $\Re_g$ と $S_g(\omega)$

図 2.26 にランダムなポーラバイナリ信号 $g_{T_b}(t)$ の様子を示す。なお，ここでは，信号パルスの繰り返し周期 T_b ，パルス幅 $T_b/2$ としている。

$g_{T_b}(t)$ の自己相関関数 $\Re_g(\tau)$ は，定義から，次式で与えられる。

$$\Re_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_{T_b}(t) g_{T_b}(t-\tau)^* dt \quad (2.63)$$

式(2.63)の右辺は，図 2.26 の青塗り部分の面積を求め，それを考慮している時間 T で割り算することで求めることができる。

$T = NT_b$ の時，時間 T に N 個のパルスが含まれる。この時，式(2.63)は次式のように変形できる。

$$\Re_g(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} g_{T_b}(t) g_{T_b}(t-\tau)^* dt \quad (2.64)$$

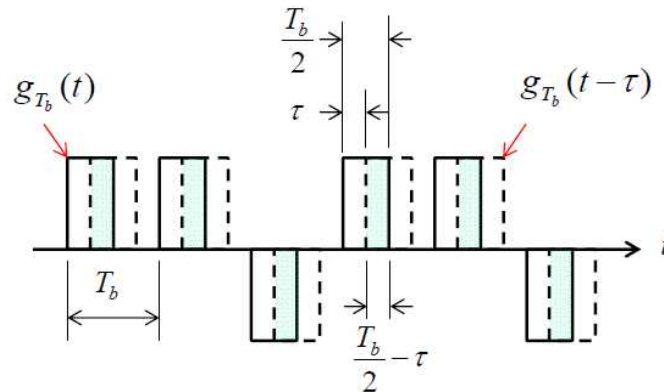


図 2.26 ランダムなポーラバイナリ信号 $g_{T_b}(t)$

ここで、 τ の値によって、以下の 2 つの場合 (I), (II) に分けて考える。

$$(I) \quad \tau \leq \frac{T_b}{2} \text{ の時}$$

$$\begin{aligned} \Re_g(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} g_{T_b}(t) g_{T_b}(t - \tau)^* dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} N \left(\frac{T_b}{2} - \tau \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\tau}{T_b} \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$(II) \quad \frac{T_b}{2} \leq \tau \text{ の時}$$

$$\Re_g(\tau) = 0 \quad (2.66)$$

$\Re_g(\tau)$ は τ に関して偶関数なので、次式で与えられる。

$$\Re_g(\tau) = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{\tau}{T_b} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2|\tau|}{T_b} \right) & |\tau| \leq \frac{T_b}{2} \\ 0 & \frac{T_b}{2} \leq |\tau| \end{cases} \quad (2.67)$$

図 2.27 に $\Re_g(\tau)$ の波形を示す。

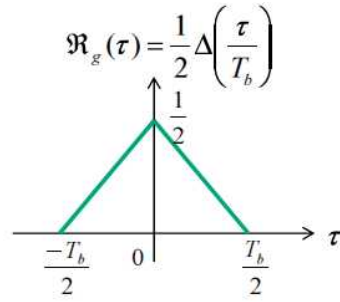


図 2.27 $\mathfrak{R}_g(\tau)$ の波形

フーリエ変換公式から

$$\mathfrak{R}_g(\tau) = \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \Leftrightarrow \mathfrak{T}(\mathfrak{R}_g(\tau)) = \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_b}{4}\right) \quad (2.68)$$

$$S_g(\omega) = \mathfrak{T}(\mathfrak{R}_g(\tau)) = \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_b}{4}\right) \quad (2.69)$$

図 2.28 に $S_g(\omega)$ のスペクトルを示す。

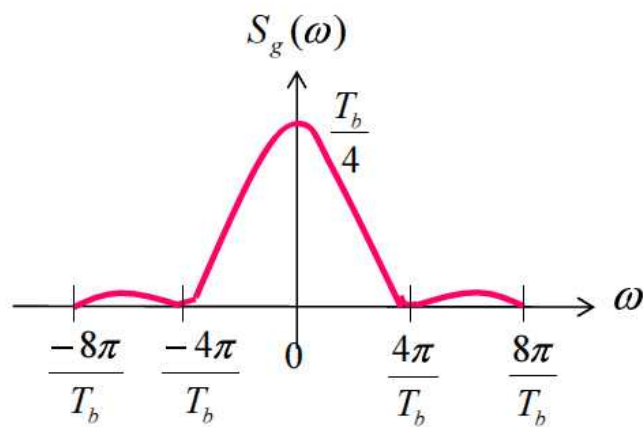


図 2.28 $S_g(\omega)$ のスペクトル

ここで、単一パルスのスペクトル $G(\omega)$ と信号の電力スペクトル $S_g(\omega)$ を比較してみよう。

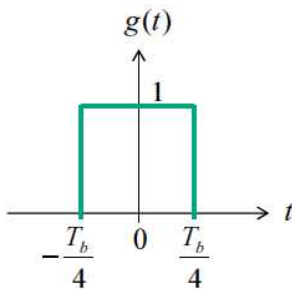
考慮する単一パルス $g(t)$ は次式で与えられ、時間応答は図 2. 29(a) となる。

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T_b}\right) \quad (2. 70)$$

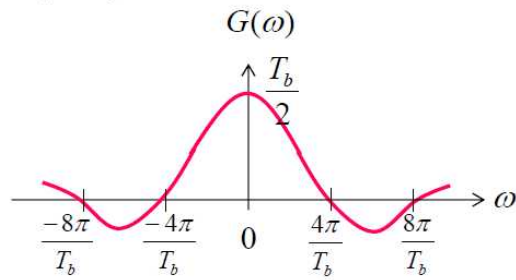
フーリエ変換から $G(\omega)$ は次式で与えられ、そのスペクトルは図 2. 29(b) となる。

$$G(\omega) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_b}{4}\right) \quad (2. 71)$$

式(2. 69)で与えられる信号の電力スペクトル $S_g(\omega)$ は、式(1. 71)で与えられる電圧スペクトル $G(\omega)$ を二乗したものに $1/T_b$ を掛けたものと一致している。このことから、信号の電力スペクトルの形は、信号に使われる電圧パルス一つの波形によって決まると言える。



(a)



(b)

図 2. 29 $g(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T_b}\right) \Leftrightarrow G(\omega) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_b}{4}\right)$

2.8 熱雑音（白色雑音）

図 2.30 に熱雑音電圧 $v_n(t)$ の時間変動の様子を模式的に示す。熱雑音では、各サンプル点での電圧値 v に対する確率密度関数 (PDF: Probability Density Function) は正規分布（ガウス分布）となる。図 2.31 に正規分布確率密度関数 $P(v)$ の様子を示す。

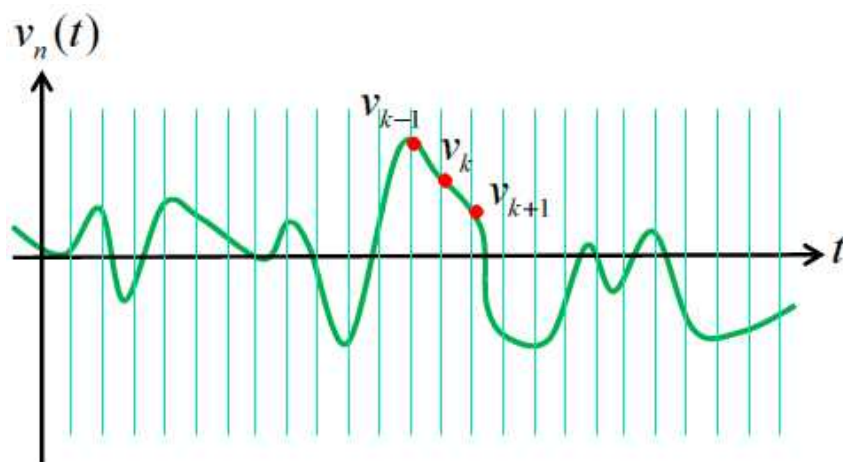


図 2.30 熱雑音電圧の時間変動の様子

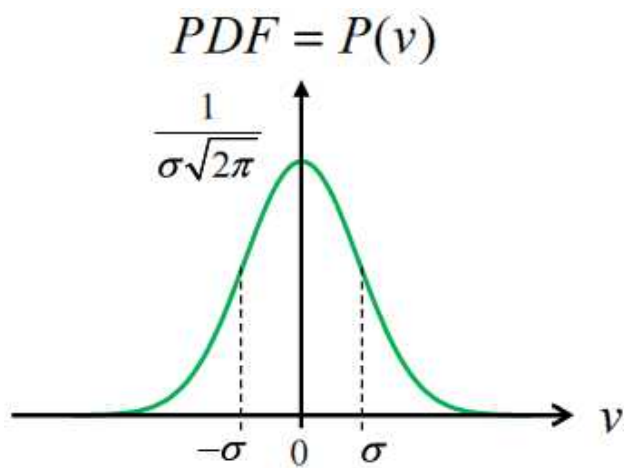


図 2.31 正規分布確率密度関数 $P(v)$

電圧値 v に対して $P(v)$ は次式で与えられる。

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} \quad (2.72)$$

ここで、正規分布の性質を表す次式が成り立つ。

(全確率=1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} dv = 1 \quad (2.73)$$

(平均値=0)

$$\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v P(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} dv = 0 \quad (2.74)$$

(二乗平均値=分散 σ^2)

$$\langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 P(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} dv = \sigma^2 \quad (2.75)$$

ここで、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均（期待値）を示す。

図 2.32 に雑音電圧の時間波形のアンサンブルを模式的に示す。

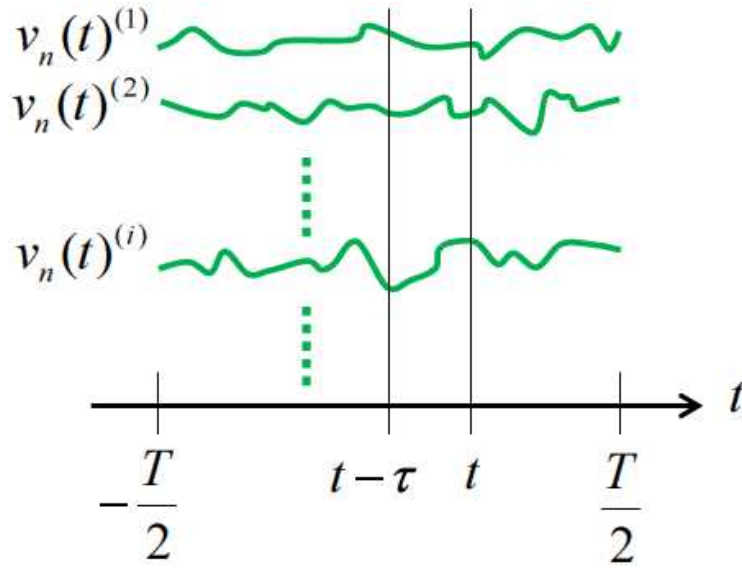


図 2.32 雑音電圧のアンサンブル

ここで，雑音電圧 $v_n(t)$ の自己相関関数 $\Re_n(\tau)$ は定義より次式で与えられる。

$$\Re_n(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_n(t) v_n(t - \tau)^* dt \quad (2.76)$$

雑音電力 P_n は次式で表せる。

$$\begin{aligned} P_n &= \Re_n(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |v_n(t)|^2 dt \\ &= \langle v^2 \rangle = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

なお，式の 2 行目はエルゴード性（時間平均とアンサンブル平均が等価）から得られる。

雑音の電力スペクトル密度 $S_n(f)$ は $\Re_n(\tau)$ とフーリエ変換の関係にあり，次式が成り立つ（式(2.61)参照）。

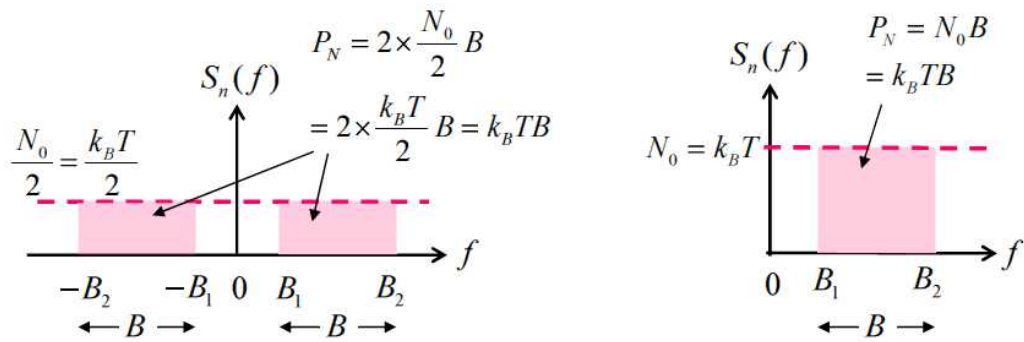
$$\left. \begin{aligned} S_n(f) &= \mathfrak{I}(\mathfrak{R}_n(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ \mathfrak{R}_n(\tau) &= \mathfrak{I}^{-1}[S_n(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

熱雑音の場合，電力スペクトル密度 $S_n(f)$ は次式で与えられる。周波数によらず一定であり（このことが白色雑音ともよばれる由来である），かつ，絶対温度 T に依存する。

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{k_B T}{2} \quad (2.79)$$

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ (J / K)} \quad (\text{ボルツマン定数})$$

図 2.33 に $S_n(f)$ の特性を示す。図には，通過帯域 B ($(-B_2 \sim -B_1)$ および $(B_1 \sim B_2)$) のフィルタ $H(f)$ により帯域制限される様子も示す。なお，図の(a) は負の周波数まで考慮する場合、(b) は正の周波数のみを考慮する場合の熱雑音の電力スペクトルである。負の周波数については，2.4 節で詳述した。



(a) 負周波数を考慮する場合

(b) 正周波数のみを考慮する場合

図 2.33 熱雑音の電力スペクトル密度 $S_n(f)$

通過帯域 B ($(-B_2 \sim -B_1)$ および $(B_1 \sim B_2)$) に帯域制限された熱雑音の雑音電力は次式で与えられる。

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df = 2 \times \frac{N_0}{2} B = N_0 B = 2 \times \frac{k_B T}{2} B = k_B T B \quad (2.80)$$

式(2.77) との比較から、次式が得られる。

$$P_n = \sigma^2 = N_0 B = k_B T B \quad (2.81)$$

熱雑音の電力スペクトル密度が周波数によらず一定 ($S_n(f) = N_0/2$) (負の周波数を考慮した場合) であることから、自己相関関数 $\mathfrak{R}_n(\tau)$ は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_n(\tau) &= \mathfrak{T}^{-1}[S_n(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \end{aligned} \quad (2.82)$$

上式から、 $\mathfrak{R}_n(\tau)$ は $\tau = 0$ においてのみ値を持ち、 $\tau \neq 0$ では 0 となっている。このことは、熱雑音では、有限時間 τ 離れた電圧同士は相関を持たないことを意味する。

2.9 ポーラバイナリ信号の符号誤り率 P_e

図 2.34 のような信号パルス $g(t)$ を用い、その正負で符号 1 または符号 0 を伝送する通信系を考える。雑音が存在しない場合には、サンプリング時刻 T_s で A_p または $-A_p$ の最大電圧が検出されるようにタイミングが設定されているものとす

る。ここで、熱雑音が存在する場合、サンプリング時刻 T_s で検出される電圧分布は、図 2.35 のように、平均が A_p または $-A_p$ となる正規分布となる。

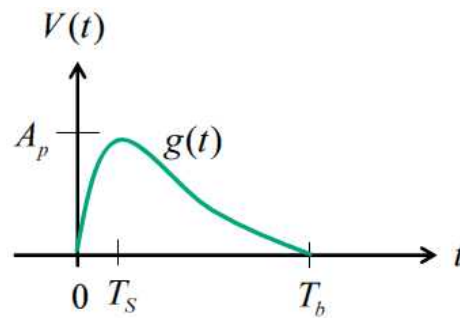


図 2.34 信号パルス波形

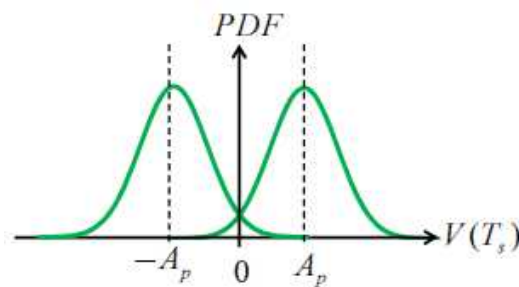


図 2.35 検出される電圧分布（平均が A_p または $-A_p$ となる正規分布）

サンプリング時刻 T_s における検出電圧 $V(T_s)$ が正の場合に符号1が送信されたと判定し、 $V(T_s)$ が負の場合に符号0が送信されたと判定するものとする、熱雑音の存在により以下のような誤りが生じる。

(1) $V(T_s) \geq 0$ の時

符号1が送信されたと判定する。この時、符号0が送信されたものを誤って

符号 1 と判定する確率は $P_e^1 = Q\left(\frac{A_p}{\sigma}\right)$ となる。

(2) $V(T_s) \leq 0$ の時

符号 0 が送信されたと判定する。この時、符号 1 が送信されたものを誤って符号 0 と判定する確率は $P_e^0 = Q\left(\frac{A_p}{\sigma}\right)$ となる。

ここで、

$\pm A_p$: サンプルング時刻 T_s で検出される電圧平均値

σ^2 : 雑音電圧の二乗平均 (分散) ($R = 1\Omega$ の時, 雑音電力)

$Q(\rho)$: 次式で定義され, 相補累積分布関数と呼ぶ

$$Q(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2.83)$$

$$\approx \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{0.7}{\rho^2}\right) e^{-\rho^2/2} \quad (\rho \geq 2)$$

符号 1, 0 が送信される確率が等しく $1/2$ の時, 符号誤り率 P_e は

$$P_e = \frac{1}{2}(P_e^1 + P_e^0) = \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{A_p}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{A_p}{\sigma}\right) \right) = Q\left(\frac{A_p}{\sigma}\right) \quad (2.84)$$

P_e を小さくするには検出される信号電圧と雑音電圧の比 $\rho = A_p / \sigma$ を大きくする必要がある。

2.10 最適フィルタ（整合フィルタ）

前節では，最大電圧を検出できることを前提に議論した。ここではサンプリングするタイミングで検出電圧を最大化でき，その結果 P_e を最小化できるフィルタについて述べる。図 2.36 に示すように，信号および雑音がフィルタリングされた後，サンプリングされる場合について考える。

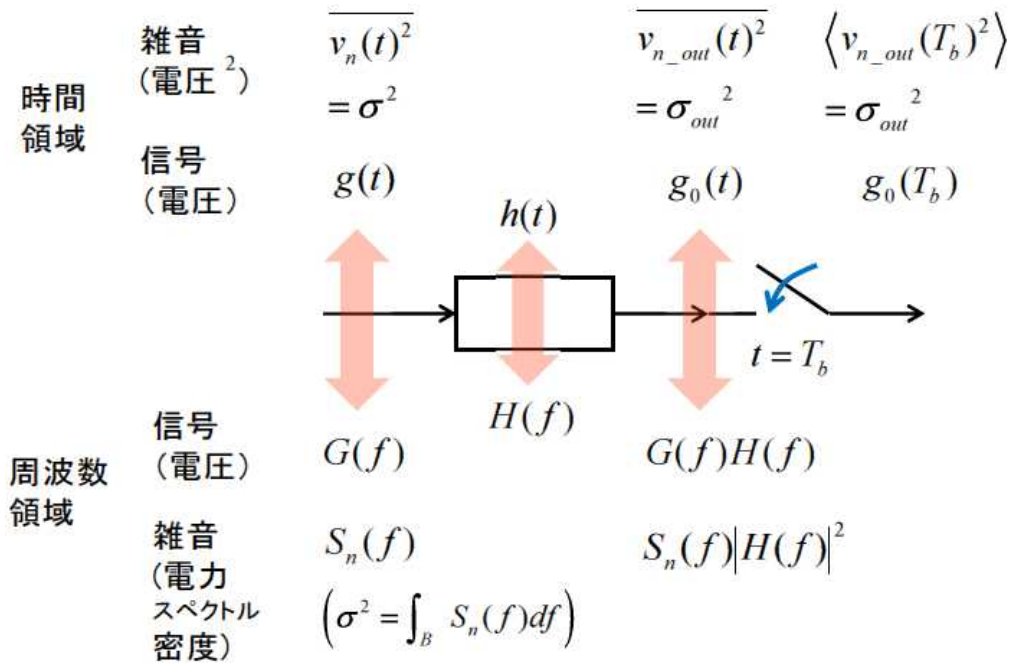


図 2.36 信号と雑音のフィルタリングとサンプリングの様子

この時，フィルタの特性により，サンプリングされた信号電圧を最大化することができ，このフィルタを最適フィルタあるいは整合フィルタと呼ぶ。

以下，最適フィルタの特性導出を行う。

フィルタリングされた出力信号の時間応答波形 $g_0(t)$ は入力信号の周波数スペクトル $G(f)$ およびフィルタの周波数スペクトル $H(f)$ を用いて以下のように表せる。

$$g_0(t) = \mathfrak{T}^{-1}[G(f)H(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \quad (2.85)$$

さらにこれを、 $t = T_b$ でサンプリングすると、

$$g_0(T_b) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi fT_b}df \quad (2.86)$$

一方、フィルタリングの後サンプリングされた雑音電圧に対しては次式が成り立つ。これは式 (2.77) と (2.80) の関係から得られる。

$$\sigma_{out}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f)df \quad (2.87)$$

式 (2.86), (2.87) を用いて、サンプリング後の信号電圧と雑音電圧の比の二乗 ρ_{out}^2 は以下で表せる。

$$\rho_{out}^2 = \frac{|g_0(T_b)|^2}{\sigma_{out}^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi fT_b}df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2df} \quad (2.88)$$

ここで、Schwarz の不等式の関係を用いると次式が得られる (付録 D)。

$$\rho_{out}^2 = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi fT_b}df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2df} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{S_n(f)}df = \rho_{\max}^2 \quad (2.89)$$

上式において、等号 (最大値) は以下の条件の時に得られる。

$$H(f)\sqrt{S_n(f)} = \alpha \left(\frac{G(f)e^{j2\pi fT_b}}{\sqrt{S_n(f)}} \right)^* = \alpha \frac{G(-f)e^{-j2\pi fT_b}}{\sqrt{S_n(f)}} \quad (2.90)$$

(α は任意の実定数)

式 (2.90) から

$$H(f) = \alpha \frac{G(-f)e^{-j2\pi fT_b}}{S_n(f)} \quad (2.91)$$

熱雑音（白色雑音）の場合， $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ であり，式 (2.91) から最適フィルタの時間応答 $h(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathfrak{I}^{-1}[H(f)] = \alpha \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(-f)e^{-j2\pi fT_b} e^{j2\pi ft} df \\ &= \alpha \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(f')e^{j2\pi(T_b-t)f'} df' = \alpha \frac{2}{N_0} g(T_b - t) = \alpha' g(T_b - t) \end{aligned} \quad (2.92)$$

ここで， α' は実定数

図 2.37 に $g(t)$ と $h(t)$ の時間応答波形を示す。信号の時間応答波形 $g(t)$ に応じて，式 (2.92) で与えられる時間応答波形 $h(t)$ を有する最適フィルタを用いることでサンプリング後の ρ_{out}^2 を最大化でき，結果，検出誤り P_e を最小化できる。

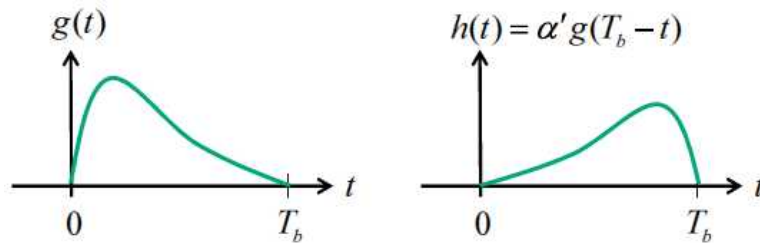


図 2.37 $g(t)$ と $h(t)$ の時間応答波形

図 2.38 に雑音電圧 $v_n(t)$ を含んだ入力信号電圧 $r(t)$ に最適フィルタ $h(t)$ を適用した場合の波形の様子を示す。

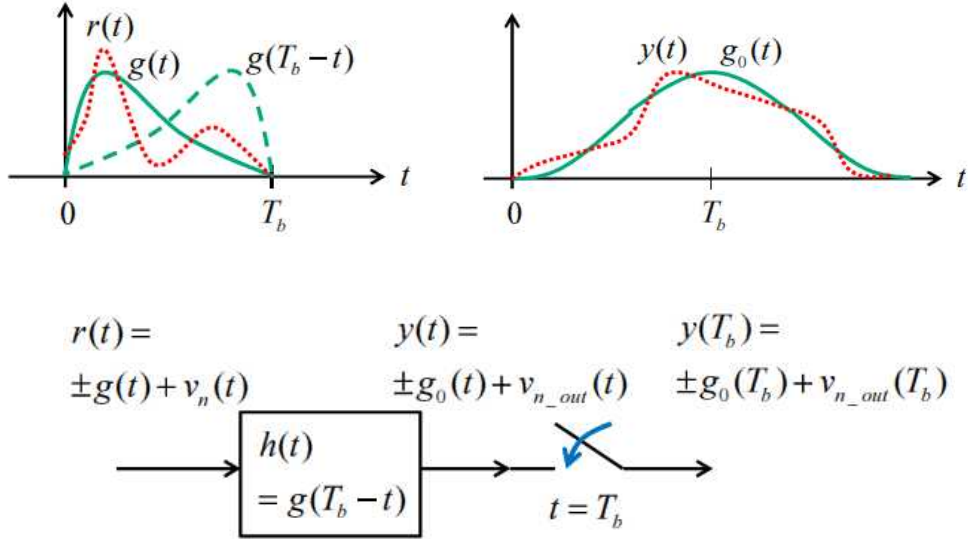


図 2.38 雑音電圧 $v_n(t)$ を含んだ入力信号 $r(t)$ に最適フィルタ $h(t)$ を適用した場合の波形の様子

最適フィルタによりフィルタリングされた雑音を含む出力信号電圧 $y(t)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 y(t) &= g_0(t) + v_{n-out}(t) = r(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(\tau) + v_n(\tau)) g(T_b + \tau - t) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(T_b + \tau - t) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} v_n(\tau) g(T_b + \tau - t) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

出力信号 $g_0(t)$ は、次式から $t = T_b$ の時に最大となり

$$g_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(T_b + \tau - t)d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\tau)d\tau = g_0(T_b) \quad (2.94)$$

以上から、 $t = T_b$ でサンプリングした $y(T_b)$ は以下のように与えられ、検出される電圧は最大化される。

$$y(T_b) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} v_n(\tau)g(\tau)d\tau \quad (2.95)$$

一方、雑音成分は変わらないので、この時 ρ_{out}^2 を最大にすることができる。

雑音が白色雑音の時、式 (2.89) から

$$\rho_{\max}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{S_n(f)} df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (2.96)$$

ここで、信号パルス $g(t)$ 1 個のエネルギー E_g は

$$\begin{aligned} E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f)^* \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f)^* G(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \end{aligned} \quad (2.97)$$

であるから、式 (2.96) はさらに

$$\rho_{\max}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{2E_g}{N_0} \quad (2.98)$$

ここで、 E_g / N_0 は信号パルス 1 個のエネルギーと雑音電力スペクトル密度との比である。これから、図 2.34 に示されるような信号パルスにおいて、最適フィルタを用いた場合、符号誤り率 P_e は以下となる。

$$P_e = Q(\rho_{\max}) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) \quad (2.99)$$

2.11 ナイキストフィルタと最適フィルタの関係は？

図 2.39 に通信システムの構成ブロックを示す。

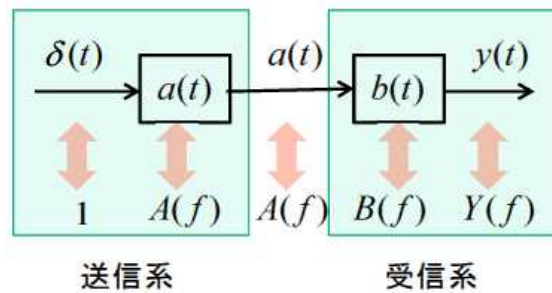


図 2.39 通信システムの構成ブロック

図において $A(f)$ (時間応答波形は $a(t)$) をロールオフ率 $\alpha=1$ のナイキストフィルタのルート関数、すなわち RRC(Root Raised Cosine Roll-off) フィルタとする。ただし、因果律を考慮して、ここでは $e^{-j\pi f t_b}$ の位相項を与える (付録 C 参照)。

この時、 $A(f)$ および $a(t)$ は次式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} A(f) &= \cos\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{f T_b}{2}\right) e^{-j\pi f T_b} \\ a(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[A(f)] = \frac{\frac{4}{\pi T_b} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_b}\right)}{4\left(\frac{2t}{T_b} - 1\right)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

入力信号をインパルス $\delta(t)$ とすると、フィルタ $A(f)$ を経て送信機から出力され受信機に入力される信号スペクトルは $A(f)$ （時間応答波形は $a(t)$ ）となる。

図 2.40 に $a(t)$ の波形を示す。

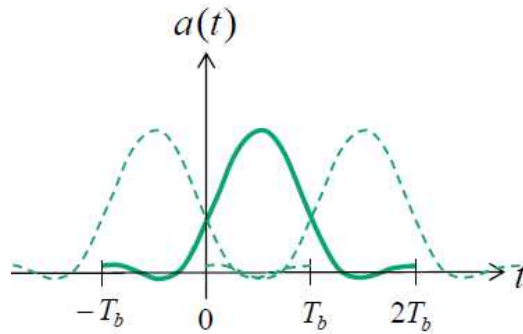


図 2.40 $a(t)$ の波形

受信機において、 $B(f)$ を最適フィルタとすると、その時間応答波形 $b(t)$ は前節の議論から以下で与えられる。

$$b(t) = a(T_b - t) = \frac{\frac{4}{\pi T_b} \cos\left(2\pi \frac{T_b - t}{T_b}\right)}{4\left(\frac{2(T_b - t)}{T_b} - 1\right)^2 - 1} = \frac{\frac{4}{\pi T_b} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_b}\right)}{4\left(\frac{2t}{T_b} - 1\right)^2 - 1} = a(t) \quad (2.101)$$

これから

$$B(f) = A(f) = \cos\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{f T_b}{2}\right) e^{-j\pi f T_b} \quad (2.102)$$

以上から、送信機において RRC フィルタにより整形された信号に対して、受信機で構成される最適フィルタは送信機に用いられたものとまったく等しい RRC フィルタとなっている。

受信機で最適フィルタによりフィルタリングされた後の受信信号の周波数スペクトル $Y(f)$ および時間波形 $y(t)$ は、それぞれ以下で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Y(f) &= A(f)B(f) = \cos^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{f T_b}{2}\right) e^{-j2\pi f T_b} \\ y(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[Y(f)] = \frac{1}{T_b} \frac{\cos\left(\pi \frac{t - T_b}{T_b}\right)}{1 - 4 \frac{(t - T_b)^2}{T_b^2}} \text{sinc}\left(\pi \frac{t - T_b}{T_b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

図 2.41 に $y(t)$ の時間応答波形を示す。 $y(t)$ はナイキスト整形された信号となっ

ており、信号検出時 (nT_b) に信号パルス (シンボル) 間干渉がない。すなわち、

無線システムでは、送受信機それぞれに RRC フィルタ ($A(f) = B(f)$) を設けることにより最適フィルタ系が構成されるとともに、送受信システム全体でナイキストフィルタが構成されるようになっている。

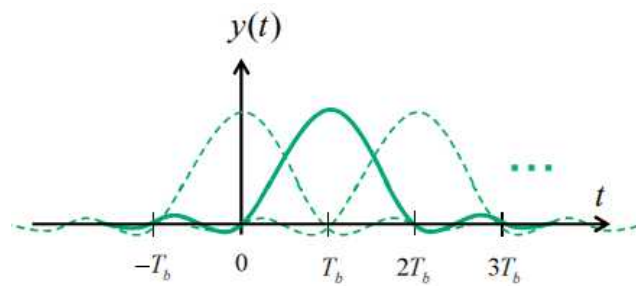


図 2.41 $y(t)$ の波形

図 2.42 に最適フィルタ系とナイキストフィルタ系の関係を示す。図に示すように、シンボル間干渉をなくすることができるナイキストフィルタ系は、最適フィルタ系でもあるという優れた特長を有する。

一方、一般の最適フィルタ系では、シンボル間干渉は考慮されていない。このため、一般には最適フィルタ系であってもシンボル間干渉が存在する。



図 2.42 最適フィルタ系とナイキストフィルタ系の関係

2.12 無線送受信システムの構成と信号の流れ

図 2.43 に無線送受信システムの構成と信号の流れを示す。なお、図はシングルキャリア伝送通信の場合を示している。

送信機において、入力デジタル信号は変調器 (MOD) により適切に変調された IQ デジタル変調信号に変換される。なお、図では簡単化のため BPSK 変調信号を示しており、信号パルスがそのまま信号シンボルとなっている。次に RRC フィルタ (RRC) により波形整形が行われ、さらにデジタルアナログ変換器 (DAC) でアナログベースバンド信号に変換される。さらにアップコンバータ (Up-Conv) により伝搬に適した RF 周波数に変換され、適切に増幅された後アンテナから送

信される。なお、送信機のアップコンバータ（Up-Conv）部は、直交変調器，RFフィルタ，高出力増幅器（HPA）などから構成される。

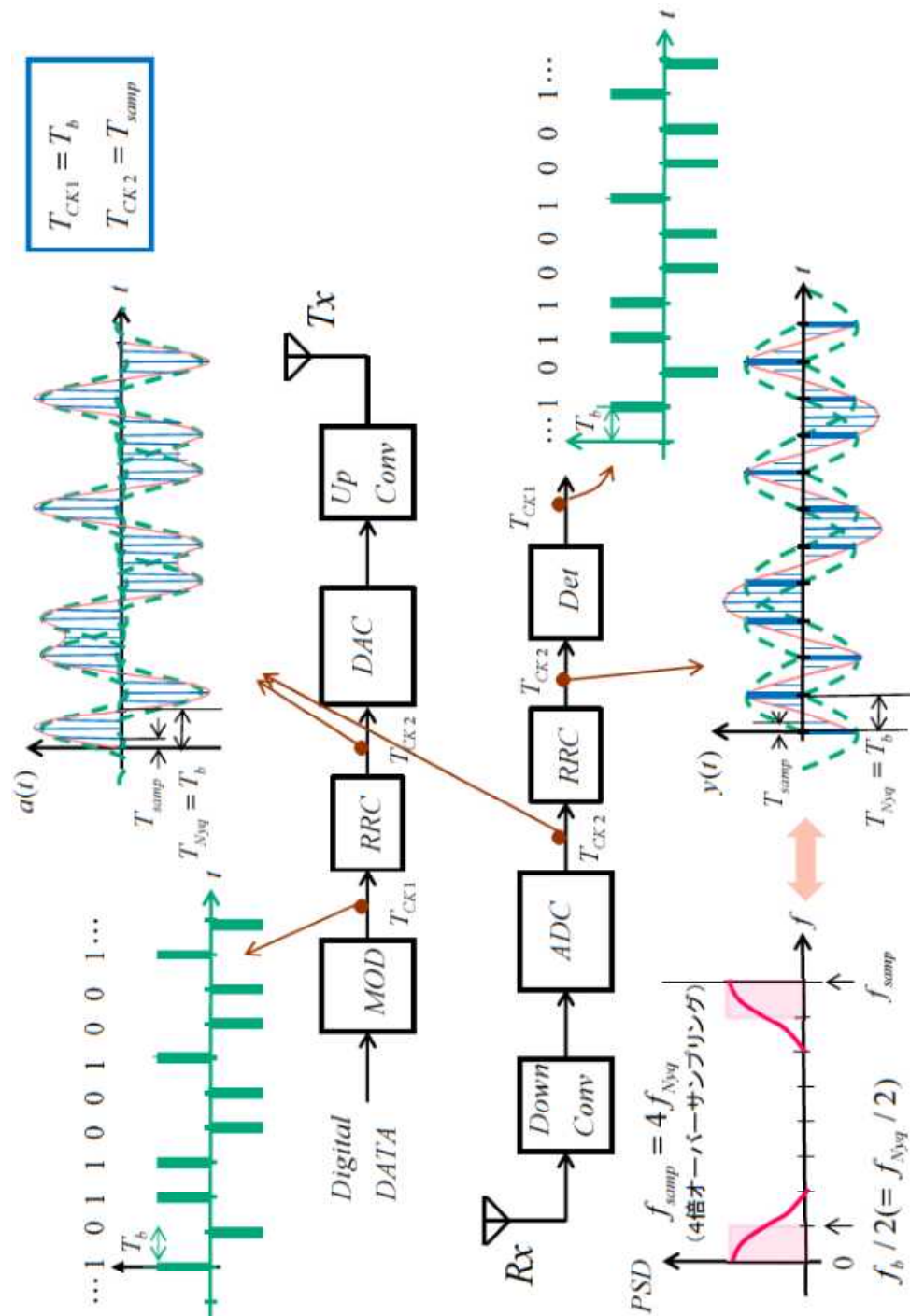


図 2.43 無線送受信システムの構成と信号の流れ

受信機において、アンテナで受信された RF 信号は、ダウンコンバータ (Down-Conv) で低雑音に増幅されるとともに、IQ アナログベースバンド信号に変換された後、アナログデジタル変換器 (ADC) によりデジタル信号に変換される。次に RRC フィルタ (RRC) によりフィルタリングされ、さらに検出器 (Det) で信号の検出・判定がされる。ここで、送信機の RRC フィルタと受信機の RRC フィルタの 2 つを通過することにより、信号パルス (シンボル) 間干渉のないナイキストフィルタリングがされている。なお、受信機のダウンコンバータ (Down-Conv) 部は、RF フィルタ、低雑音増幅器 (LNA)、直交変調器 (受信の場合は直交復調器と呼ばれることもある) などから構成される。

図はシングルキャリア伝送通信の構成を示しており、送信機の波形生成部分に RRC フィルタが用いられるが、OFDM マルチキャリア伝送通信ではこの部分が IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform) を用いて構成される。また、受信機の検波部分が RRC フィルタと検出器 (Det) を用いて構成されるが、OFDM マルチキャリア伝送通信ではこの部分が DFT (Discrete Fourier Transform) を用いて構成される (OFDM については 5 章参照)。図中に示した時間および周波数に関する記号の意味はそれぞれ以下である。

T_b : パルス間隔 $T_{Nyq}(=T_b)$: ナイキスト間隔

T_{samp} : サンプル間隔 $f_b(=\frac{1}{T_b})$: パルス周波数 (ビットレート)

$f_{Nyq}(=\frac{1}{T_{Nyq}}=\frac{1}{T_b}=f_b)$: ナイキスト周波数 (または、ナイキスト帯域)

$f_{samp}(=\frac{1}{T_{samp}})$: サンプル周波数 (例えば、 $f_{samp}=4f_{Nyq}$ の時、4 倍

オーバーサンプリング)

付録 A デルタ関数 $\delta(t)$

デルタ関数は以下の性質を有する関数として定義される。

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & (t \neq t_0) \\ \infty & (t = t_0) \end{cases} \quad (\text{A. 1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (\text{A. 2})$$

定義から，以下の性質が導かれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \quad (\text{A. 3})$$

(証明)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt &= \int_{t_0-0}^{t_0+0} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{t_0-0}^{t_0+0} \delta(t-t_0) dt \\ &= x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \end{aligned}$$

$$x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0) \quad (\text{A. 4})$$

(証明)

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \delta(t-t_0) dt \\ &\rightarrow x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0) \end{aligned}$$

付録 B フーリエ変換公式 (積と畳み込み積分)

周波数応答 $Y(\omega)$ が $G(\omega)$, $X(\omega)$ の畳み込み積分で以下のように与えられる

とき，時間応答 $y(t)$ を $g(t)$, $x(t)$ を用いて表す。

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) X(\omega - \nu) d\nu \quad (\text{B. 1})$$

式(B. 1)の逆フーリエ変換を行うと

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathfrak{F}^{-1}(Y(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) X(\omega - \nu) d\nu \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{j\nu t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) e^{j(\omega - \nu)t} d\omega \right] d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{j\nu t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\psi) e^{j\psi t} d\psi \right] d\nu \\ &= x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{j\nu t} d\nu \\ &= x(t) g(t) \end{aligned} \quad (\text{B. 2})$$

以上から、時間領域における積のフーリエ変換は、周波数領域における畳み込み積分で与えられる。

$$\mathfrak{F}[x(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) X(\omega - \nu) d\nu \quad (\text{B. 3})$$

時間応答 $y(t)$ が $g(t)$, $h(t)$ の畳み込み積分で次式のように与えられるとき、周

波数応答 $Y(\omega)$ を $G(\omega)$, $H(\omega)$ を用いて表す。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{B. 4})$$

式(B. 4)のフーリエ変換を行うと

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \mathfrak{I}(y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) e^{-j\omega \gamma} d\gamma \right] d\tau \\
&= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\
&= H(\omega) G(\omega)
\end{aligned} \tag{B.5}$$

以上から、周波数領域における積の逆フーリエ変換は、時間領域における畳み込み積分で与えられる。

$$\mathfrak{I}^{-1}[H(\omega)G(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) d\tau \tag{B.6}$$

付録C ナイキストフィルタ

図 C.1 に、ロールオフ率 α が (a) $\alpha = 0$, (b) $0 < \alpha < 1$, (c) $\alpha = 1$ の各場合について、ナイキストフィルタの周波数スペクトル $H(f)$ および伝達関数（インパルス応答） $h(t)$ を示す。 α が $0 \rightarrow 1$ と大きくなるにつれ、スペクトルは広がるが、インパルス応答は早く収束し、その結果信号パルス間の干渉を小さくできる。

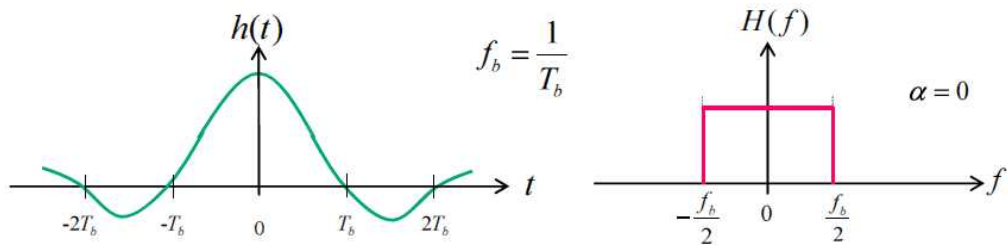
なお、図の $H(f)$ は具体的には次式で与えられる（ただし、 $\alpha = 0$ の場合は除く）。

$$\begin{aligned}
H(f) &= \frac{1}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi(|f| - f_b/2)}{\alpha f_b} \right) \right] = \cos^2 \left(\frac{\pi(|f| - (1-\alpha)f_b/2)}{2\alpha f_b} \right) \\
&\quad ((1-\alpha)f_b/2 \leq |f| \leq (1+\alpha)f_b/2)
\end{aligned}$$

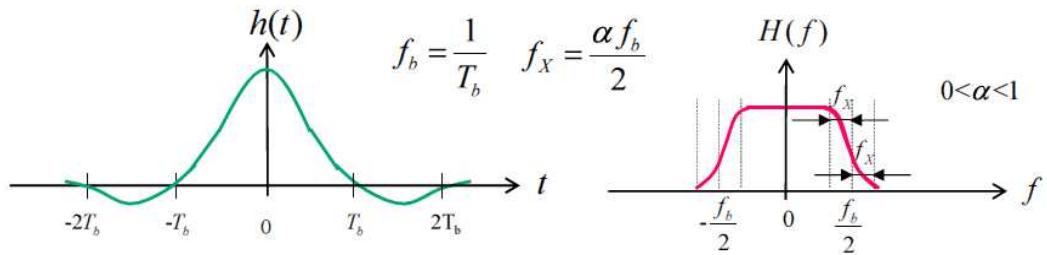
$$H(f) = 1 \quad (|f| \leq (1-\alpha)f_b / 2)$$

$$H(f) = 0 \quad ((1+\alpha)f_b / 2 \leq |f|)$$

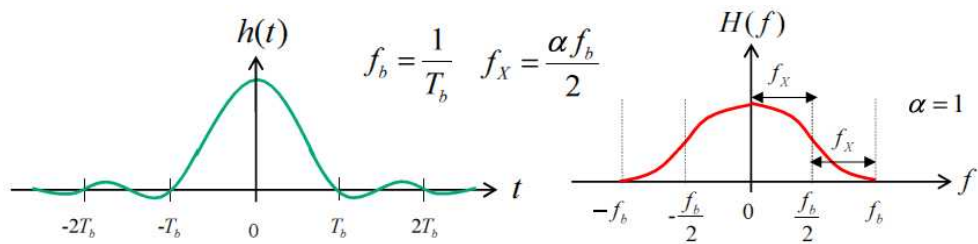
(C. 1)



(a) $\alpha = 0$



(b) $0 < \alpha < 1$



(c) $\alpha = 1$

図 C.1 ナイキストフィルタのロールオフ率 α が異なる場合

次に、ナイキストフィルタにおいて、スペクトルに位相項 $e^{-j2\pi fT_b}$ を与えた場合を考える。例えばロールオフ率 $\alpha=1$ の時、 $H(f)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H(f) &= \cos^2\left(\frac{\pi|f|}{2f_b}\right) \text{rect}\left(\frac{fT_b}{2}\right) e^{-j2\pi fT_b} \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi fT_b}{2}\right) \text{rect}\left(\frac{fT_b}{2}\right) e^{-j2\pi fT_b} \end{aligned} \quad (\text{C. 2})$$

上式(C. 2)において、 $\text{rect}\left(\frac{fT_b}{2}\right)$ の項は、 $\frac{1}{T_b} = f_b \leq f$ において $H(f)=0$ であることから付加される。

図 C. 2 に周波数スペクトル $H(f)$ （の振幅, 位相）および伝達関数（インパルス応答） $h(t)$ を示す。位相項 $e^{-j2\pi fT_b}$ により、 $h(t)$ は図 C-1(c)に比べ T_b 時間遅れた波形となり、マイナス時間の寄与分を軽減できる（因果律を考慮した波形に近づく）。

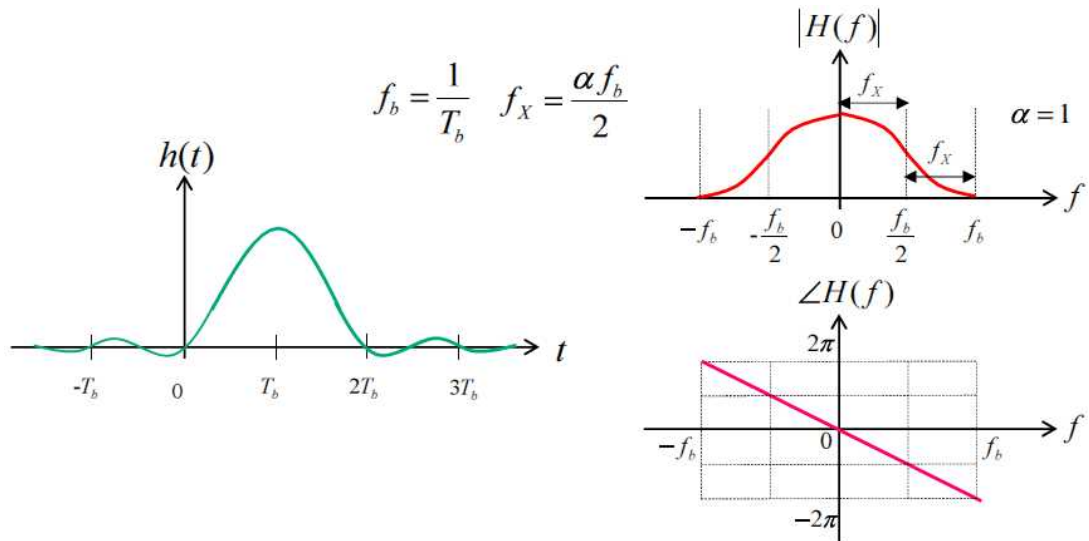


図 C. 2 位相項が付加された場合のナイキストフィルタの $H(f)$ ， $h(t)$

付録 D Schwarz の不等式から式(2.89), (2.90), (2.91)を導出

以下の関数を考えると, 常に 0 以上となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|X(f)| - x |Y(f)| \right)^2 df \geq 0 \quad (\text{D. 1})$$

ここで, x は実数, $X(f)$, $Y(f)$ は複素関数である。

式(D.1)を展開して, x に関する次式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df - 2x \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| |Y(f)| df + x^2 \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \geq 0 \quad (\text{D. 2})$$

上の 2 次式の判別式 D は

$$D = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| |Y(f)| df \right]^2 - \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \leq 0 \quad (\text{D. 3})$$

これから,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y(f) df \right|^2 &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| |Y(f)| df \right]^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \end{aligned} \quad (\text{D. 4})$$

等号は以下の場合に成り立つ。

$$X(f) = \alpha Y(f)^* \quad (\text{D/5})$$

(α は任意の実定数)

ここまでは, Schwarz の不等式として一般に知られているものである。
次に以下の関数の置き換えをする。

$$X(f) = H(f)\sqrt{S_n(f)} \quad (\text{D. 6})$$

$$Y(f) = \frac{G(f)e^{j2\pi fT_b}}{\sqrt{S_n(f)}} \quad (\text{D. 7})$$

ここで、 f は正の実数、 $S_n(f)$ は正の実関数、 $H(f)$ 、 $G(f)$ は以下の条件を満たす複素関数とする。

$$H(f)^* = H(-f) \quad (\text{D. 8})$$

$$G(f)^* = G(-f) \quad (\text{D. 9})$$

これは、複素関数表示したフィルタおよび信号の周波数応答（スペクトル）特性において一般に成り立つものである（フィルタおよび信号を、観測可能な実関数で表わすことができるための条件）。

式(D. 6)、(D. 7)を式(D. 4)に代入して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f)e^{j2\pi fT_b} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (\text{D. 10})$$

これから、

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f)e^{j2\pi fT_b} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (\text{D. 11})$$

等号が成り立つのは以下の場合

$$H(f)\sqrt{S_n(f)} = \alpha \left(\frac{G(f)e^{j2\pi fT_b}}{\sqrt{S_n(f)}} \right)^* = \alpha \frac{G(-f)e^{-j2\pi fT_b}}{\sqrt{S_n(f)}} \quad (\text{D. 12})$$

これから,

$$H(f) = \alpha \frac{G(-f)e^{-j2\pi fT_b}}{S_n(f)} \quad (\text{D. 13})$$