

3 デジタル変調信号のビット誤り率 BER

3.1 デジタル変調信号

デジタル無線通信では、次式で与えられる高周波電圧 $v_s(t)$ を用い、その振幅、位相にデジタル情報を載せて通信をおこなう。

$$v_s(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (3.1)$$

なお、以下では周波数 ω に情報を載せる周波数変調は考えない。 $v_s(t)$ はさらに以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} v_s(t) &= A \cos(\theta) \cos(\omega t) - A \sin(\theta) \sin(\omega t) = V_I \cos(\omega t) - V_Q \sin(\omega t) \\ &= \operatorname{Re}\left((V_I + jV_Q)e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(Ze^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}(v(t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 $v(t) = Ze^{j\omega t} = (V_I + jV_Q)e^{j\omega t}$ は複素搬送波 $e^{j\omega t}$ が複素信号 $Z = V_I + jV_Q$ で振幅変調されたものであり、 $e^{j\omega t}$ と Z の積で表わされることから線形変調と呼ばれる。また、式(3.2)は、2つの直交する高周波 $\cos(\omega t)$ 、 $\sin(\omega t)$ を用い、それらの振幅 V_I 、 V_Q にデジタル情報を載せると見ることができる。

以下では、特に *ASK* (Amplitude Shift Keying)、*BPSK* (Binary Phase Shift Keying)、*QPSK* (Quaternary Phase Shift Keying)、*QAM* (Quadrature Amplitude Modulation) のデジタル線形変調信号について、その符号誤り率（シンボル誤り率ともよぶ） P_e 、ビット誤り率 *BER* (Bit Error Rate)、搬送波における信号電力対雑音電力比 *CNR*、1 ビットの信号エネルギー対雑音電力スペクトル密度比 E_b / N_0 を導出し、それらの関係を求める。解析にあたり、負荷抵抗は $R = 1\Omega$ とする。なお、ここでは信号検出は同期検波によるものとする。

デジタル変調信号では、複素信号電圧 $Z = V_I + jV_Q$ の V_I , V_Q の値を座標とする信号点で符号が与えられ、これをシンボルとよぶ。各デジタル変調信号における、 V_I , V_Q の取り得る電圧値、これにより構成される信号点の数 M 、これを2進数表記する場合のビット数 b を表 3.1 にまとめて示す。なお、隣り合う信号点間の電圧の距離はすべて等しく 2δ であるとする。

表 3.1 デジタル変調信号の電圧値 V_I , V_Q , 信号点数 M , ビット数 b

変調信号	V_I, V_Q, M, b
ASK	$V_I = 2\delta, 0$ $V_Q = 0$ (用いない) $M = 2$ $b = 1$
BPSK	$V_I = \delta, -\delta$ $V_Q = 0$ (用いない) $M = 2$ $b = 1$
QPSK	$V_I = \delta, -\delta$ $V_Q = \delta, -\delta$ $M = 4$ $b = 2$
QAM	$V_I = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_n 2^0$ ($a_1, a_2, \dots, a_n = \delta, -\delta$) $V_Q = b_1 2^{n-1} + b_2 2^{n-2} + \dots + b_n 2^0$ ($b_1, b_2, \dots, b_n = \delta, -\delta$) $M = 2^{2n}$ $b = 2n$ (例えば, 16QAM($n=2$) の場合) $V_I = 3\delta, \delta, -\delta, -3\delta$ $V_Q = 3\delta, \delta, -\delta, -3\delta$ $M = 16$ $b = 4$

図 3.1 に ASK, BPSK, QPSK, 16QAM について、 V_I , V_Q の取り得る値により決まる信号点配置図 (Constellation diagram) (信号空間ダイアグラムとも呼ばれる) を示す。図中、[] 記号内に示した数字は 2 進数表記した符号 (ビット列) を表している。ここでは、グレイ符号 (隣接する信号点の 2 進数表記は 1 カ所でのみ異なる ; ハミング距離が 1) を用いている。

以上の各デジタル変調信号は同一の周波数帯域幅 (占有帯域幅, ナイキストフィルタの帯域幅) を用いて実現される。従って、 M (あるいは b) が大きい程、同一周波数帯域幅でより多くの情報を通信できる (周波数利用効率が良い) といえる。しかし、実際には通信路に雑音やひずみ (線形ひずみ, 非線形ひずみ) が存在し、 M (あるいは b) が大きくなる程その影響を受けやすくなる問

題が出てくる。このため、通信路に応じたトレードオフが必要である。

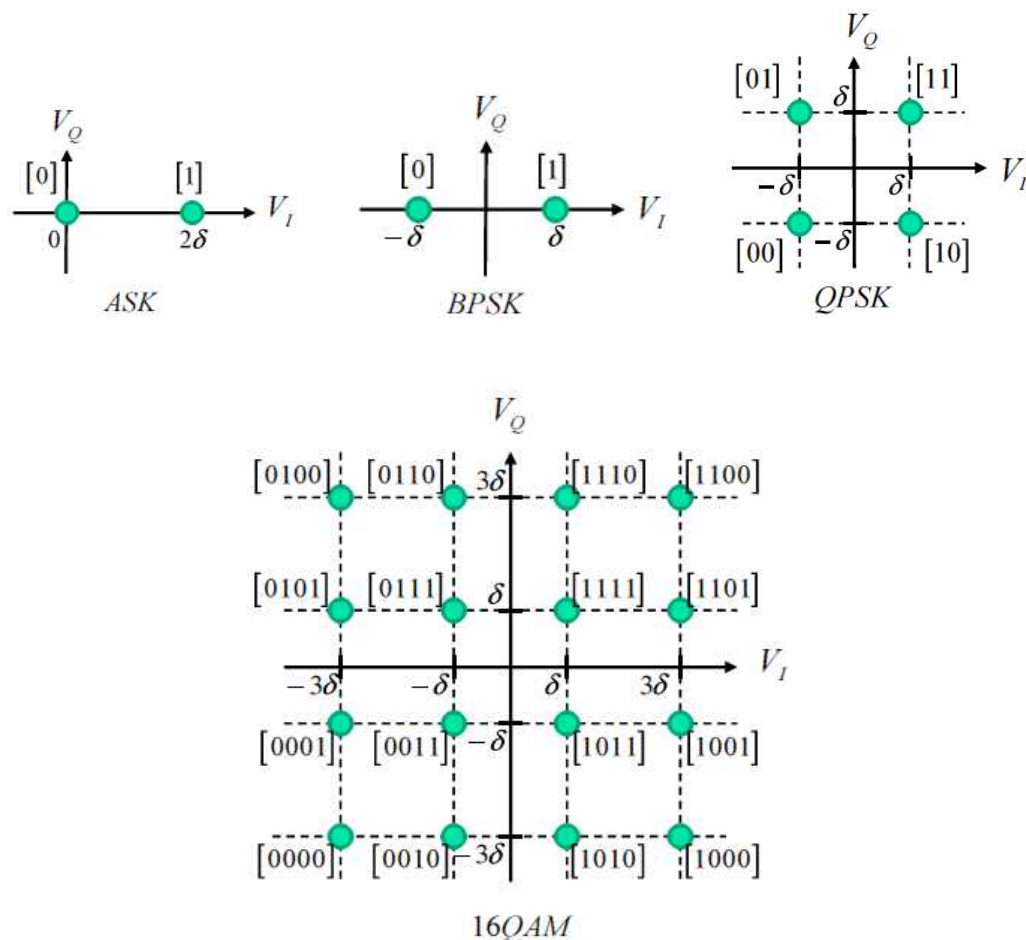


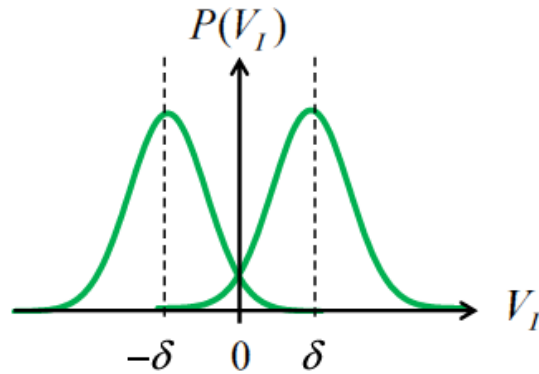
図 3.1 デジタル変調信号の信号点配置図 (Constellation diagram)

3.2 BERと δ/σ_n の関係

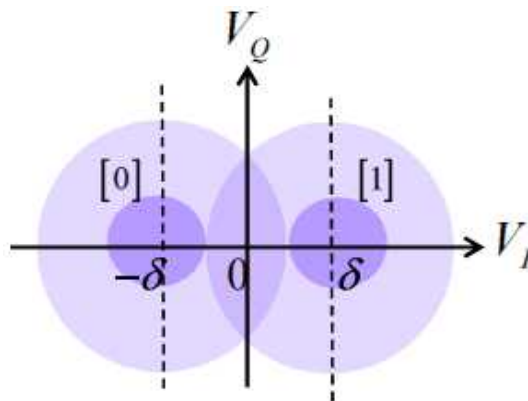
ここでは、雑音（正規分布する熱雑音）のみが存在する場合の各デジタル線形変調信号について考える。この場合、受信/検出される V_I , V_Q の電圧値は、雑音が無い場合の V_I , V_Q の電圧値（信号点）を中心として広がりを持って分布することになる。熱雑音の場合、その分布は正規分布となる。ここでは、各デジタル線形変調信号に対して BER と δ/σ_n の関係を求める。

(1) *BPSK* の場合

図 3.2(a), (b)に *BPSK* 変調信号の検出電圧分布を示す。(a)は V_I 成分の検出電圧に対応した確率密度関数 *PDF* を示している。平均値が δ および $-\delta$, 分散が σ_n^2 の 2 つの正規分布からなっている。(b)は検出電圧分布の様子を V_I , V_Q 座標平面の上方から見たもので, 図中, 濃く色塗りした円部分は検出電圧値のばらつきが雑音電圧の実効値 σ_n 以下となる部分を, 薄く色塗りした円部分は $3\sigma_n$ となる部分を, 模式的に示したものである。



(a) V_I 検出電圧の確率密度関数 *PDF*



(b) V_I , V_Q 座標平面の上方から見たもの

図 3.2 *BPSK* 変調信号の検出電圧分布

検出電圧 V_I が $0 \leq V_I$ の場合、符号[1]が送信され、 $V_I \leq 0$ の場合、符号[0]が送信されたと判定する。ここで、符号[0]が送信されたにもかかわらず、雑音の影響で、 $0 \leq V_I$ となり、符号[1]と誤って判定される確率 P_e^1 は

$$P_e^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{(V_I+\delta)^2}{2\sigma_n^2}} dV_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sigma_n}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.3)$$

一方、符号[1]が送信されたにもかかわらず、雑音の影響で、 $V_I \leq 0$ となり、符号[0]と誤って判定される確率 P_e^0 は

$$P_e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(V_I-\delta)^2}{2\sigma_n^2}} dV_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\delta}{\sigma_n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sigma_n}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.4)$$

ここで、 $Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$ を相補累積分布関数と呼ぶ（付録 E 参照）。

符号[1]および[0]が送信される確率は等しく $1/2$ とすれば、符号を誤って判定する符号誤り率 $P_{e,BPSK}$ は以下となる。

$$P_{e,BPSK} = \frac{1}{2}(P_e^1 + P_e^0) = \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)\right) = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.5)$$

$BPSK$ の場合、その 2 個の符号[1]、[0]を表わす信号点は 1 ビットのパルスで実

現される。これから、1 ビットパルスのビット誤り率 BER_{BPSK} は1 シンボルの符号誤り率 $P_{e,BPSK}$ と等しくなり、次式が成り立つ。

$$BER_{BPSK} = P_{e,BPSK} = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.6)$$

(2) $QPSK$ の場合

図 3.3 に $QPSK$ 変調信号の検出電圧分布を示す。図は検出電圧分布の様子を V_I , V_Q 座標平面の上方から見たものである。なお、検出電圧の PDF の図 (図 3.2(a) に相当) は以後省略する。

$QPSK$ の場合、 V_I , V_Q で成る信号点が検出される象限により符号を判定する。例えば、 V_I , V_Q が第一象限に検出される場合、符号[11]と判定される。ここで、符号[11]が送信されたにもかかわらず、雑音の影響で、 V_I , V_Q が他の象限で検出されると、誤って判定されることになる。例えば、符号[11]が隣の符号

(この場合、符号[10]または符号[01])に誤る確率は、それぞれ $Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$ である。

なお、ここでは、隣以外の符号 (この場合符号[00]) に誤る確率は十分小さく無視できるとする。

各符号 ([11], [10], [01], [00]) が送信される確率は等しく $1/4$ である。そ

それぞれの送信された符号が誤る確率は $2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$ である。これから $P_{e,QPSK}$ は次式で与えることができる。

$$P_{e,QPSK} = \frac{1}{4} \left(2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + 2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + 2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + 2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \right) = 2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.7)$$

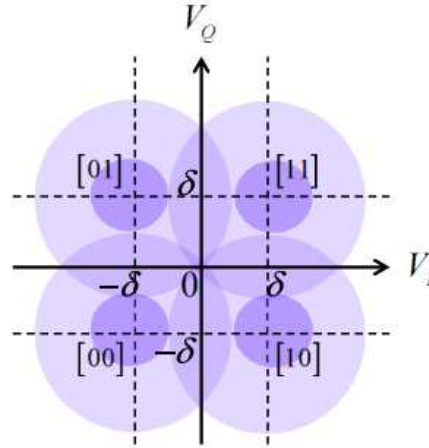


図 3.3 $QPSK$ 変調信号の検出電圧分布

$QPSK$ の場合、その 4 個の符号 $[11]$, $[10]$, $[01]$, $[00]$ を表わす信号点は 2 ビットのパルスで実現される。グレイ符号の場合、誤りは 2 ビットのパルスの内の 1 カ所でのみ生じる。これから、1 ビットあたりのビット誤り率 BER_{QPSK} は

$P_{e,QPSK}$ の 1/2 となり、次式が成り立つ。

$$BER_{QPSK} = \frac{1}{2} P_{e,QPSK} = \frac{1}{2} 2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.8)$$

(3) 16QAM の場合

図 3.4 に 16QAM 変調信号の検出電圧分布を示す。図は検出電圧分布の様子を V_I , V_Q 座標平面の上方から見たものである。

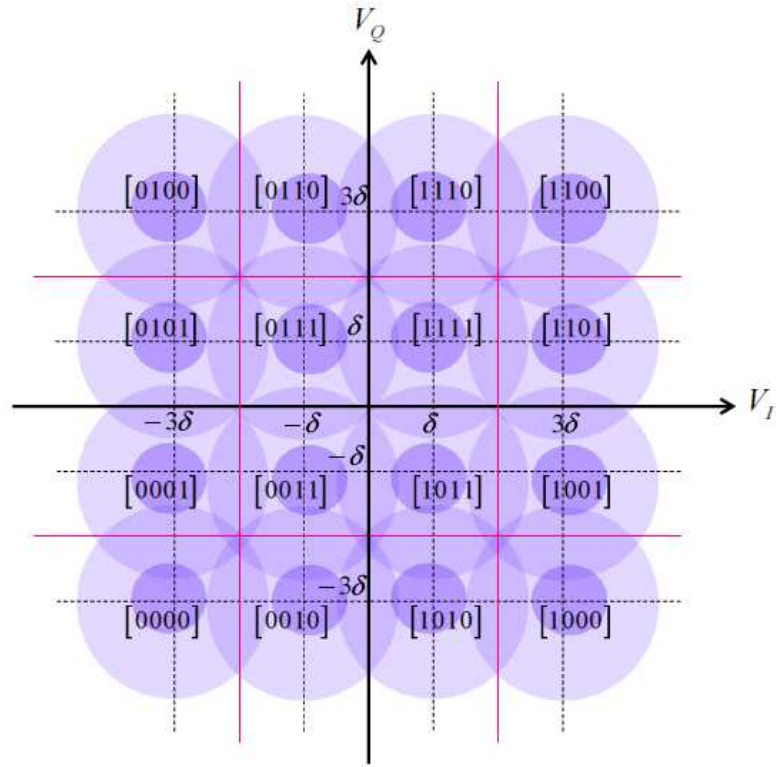


図 3.4 16QAM 変調信号の検出電圧分布

16QAM の場合も、隣の符号に誤る確率はそれぞれ $Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$ である。第一象限について考えると、例えば符号 [1100] は 2 カ所で隣の符号と接し、符号 [1101] および [1110] は 3 カ所で隣の符号と接し、符号 [1111] は 4 カ所で隣の符号と接している。他の象限についても同様なことがいえる。また、各符号が送信される確率は等しく 1/16 である。これから、16QAM の符号誤り率 $P_{e,16QAM}$ は次式で与えることができる。

$$P_{e,16QAM} = \frac{1}{16} \times 4 \left(2Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + 2 \times 3Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + 4Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \right) = 3Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.9)$$

16QAM の場合、その 16 個の符号を表わす信号点は 4 ビットのパルスで実現さ

れる。グレイ符号の場合、誤りは4ビットのパルスの中の1カ所でのみ生じる。これから、1ビットあたりのビット誤り率 BER_{16QAM} は $P_{e,16QAM}$ の1/4となり、次式が成り立つ。

$$BER_{16QAM} = \frac{1}{4} P_{e,16QAM} = \frac{3}{4} Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.10)$$

(4) *ASK* の場合

ASK 変調信号の復調では、精度の要求される同期検波は一般には用いられない。しかし、ここでは他の変調方式との比較のため *ASK* にも同期検波を用いるとして検討をおこなう。図 3.5 に *ASK* 変調信号の検出電圧分布を示す。図は検出電圧分布の様子を V_I , V_Q 座標平面の上方から見たものである。*ASK* の場合、

検出電圧 V_I が $\delta \leq V_I$ の場合、符号[1]が送信され、 $V_I \leq \delta$ の場合、符号[0]が送信されたと判定する。この時、符号を誤って判定する符号誤り率 $P_{e,ASK}$ は、以下のように考えて求めることができる。符号[1]が隣の符号（符号[0]）に誤る確率、

および符号[0]が隣の符号（符号[1]）に誤る確率はともに $Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$ である。符号[1],

符号[0]が送信される確率は等しく1/2である。これから $P_{e,ASK}$ は次式で与えることができる。

$$P_{e,ASK} = \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \right) = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \quad (3.11)$$

実際に正規分布する確率密度関数を用いて解いてみると以下となり、式(3.11)と同じ結果が得られる。

$$\begin{aligned}
P_{e,ASK} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{\frac{-V_I^2}{2\sigma_n^2}} dV_I + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{\delta} e^{\frac{-(V_I-2\delta)^2}{2\sigma_n^2}} dV_I \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sigma_n}}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\delta}{\sigma_n}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2} Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

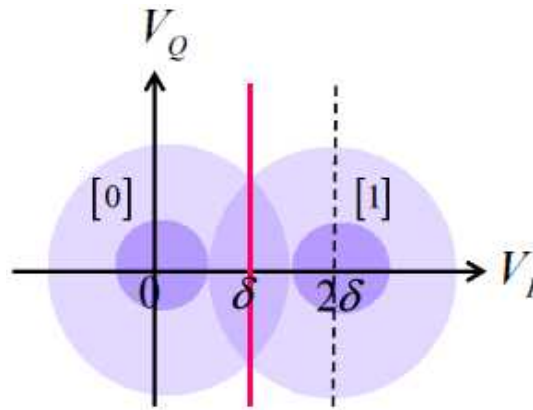


図 3.5 ASK 変調信号の検出電圧分布

ASK の場合，その 2 個の符号 [1]，[0] を表わす信号点は 1 ビットのパルスで実現される。これから，1 ビットあたりのビット誤り率 BER_{ASK} は $P_{e,ASK}$ と等しく，次式が成り立つ。

$$BER_{ASK} = P_{e,ASK} = Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right) \tag{3.13}$$

3.3 δ/σ_n ， CNR ， E_b/N_0 の関係

(1) δ/σ_n と CNR の関係

搬送波（角）周波数 ω_p とし、搬送波信号電圧 $v_s(t)$ と搬送波雑音電圧 $v_N(t)$ となる搬送波電圧 $v_r(t)$ を考える。これらは次式で関係付けられるとする。

$$v_r(t) = v_s(t) + v_N(t) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} v_s(t) &= A \cos(\theta) \cos(\omega_p t) - A \sin(\theta) \sin(\omega_p t) \\ &= V_I \cos(\omega_p t) - V_Q \sin(\omega_p t) \\ &= \operatorname{Re} \left((V_I + jV_Q) e^{j\omega_p t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(Z e^{j\omega_p t} \right) = \operatorname{Re} (v(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$v_N(t) = x_n \cos \omega_p t - y_n \sin \omega_p t \quad (3.16)$$

$$\text{ここで, } \langle x_n^2 \rangle = \langle y_n^2 \rangle = \sigma_n^2 \quad (3.17)$$

$$\sigma_n \left(= \sqrt{\langle x_n^2 \rangle} = \sqrt{\langle y_n^2 \rangle} \right) \text{ は雑音電圧の実効値}$$

デジタル変調信号では V_I , V_Q も信号に応じて変化する確率変数であるので、変数に対してアンサンブル平均 $\langle \rangle$ の値（期待値）を用いる。また V_I , V_Q は互いに無相関であることを用いる。この時、搬送波信号電圧 $v_s(t)$ による搬送波信号電力 P_s は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T} \int_T \langle |v_s(t)|^2 \rangle dt = \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \\ &= \frac{1}{2} \langle V_I^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle V_Q^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |Z|^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

また、搬送波雑音電圧 $v_N(t)$ による搬送波雑音電力 P_N は式 (3. 16), (3. 17) を用いて以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{T} \int_T \langle |v_N(t)|^2 \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \langle x_n^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle y_n^2 \rangle = \langle x_n^2 \rangle = \langle y_n^2 \rangle = \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (3. 19)$$

これから搬送波における信号電力対雑音電力比 CNR は次式で表わせる。

$$CNR = \frac{\text{搬送波信号電力}}{\text{搬送波雑音電力}} = \frac{P_S}{P_N} = \frac{\frac{1}{2} (\langle V_I^2 \rangle + \langle V_Q^2 \rangle)}{\sigma_n^2} \quad (3. 20)$$

上式 (3. 20) において、信号電力 P_S は変調信号により変化するが、雑音電力は変調信号によらず $P_N = \sigma_n^2$ となる。

これから、各変調信号に対して、 δ / σ_n と CNR には以下の関係がある。

$$\begin{aligned} ASK \text{ の場合 } P_{S,ASK} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (4\delta^2 + 0) + 0 \right) = \delta^2 \\ \rightarrow CNR_{ASK} &= \frac{\delta^2}{\sigma_n^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{\sigma_n} = \sqrt{CNR_{ASK}} \end{aligned} \quad (3. 21)$$

$$\begin{aligned} BPSK \text{ の場合 } P_{S,BPSK} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\delta^2 + \delta^2) + 0 \right) = \frac{1}{2} \delta^2 \\ \rightarrow CNR_{BPSK} &= \frac{\delta^2}{2\sigma_n^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{\sigma_n} = \sqrt{2CNR_{BPSK}} \end{aligned} \quad (3. 22)$$

$$QPSK \text{ の場合 } P_{S,QPSK} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\delta^2 + \delta^2) + \frac{1}{2} (\delta^2 + \delta^2) \right) = \delta^2$$

$$\rightarrow \quad CNR_{QPSK} = \frac{\delta^2}{\sigma_n^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{\sigma_n} = \sqrt{CNR_{QPSK}} \quad (3.23)$$

$$16QAM \text{ の場合 } P_{S,16QAM} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} 2(\delta^2 + 9\delta^2) + \frac{1}{4} 2(\delta^2 + 9\delta^2) \right) = 5\delta^2$$

$$\rightarrow \quad CNR_{16QAM} = \frac{5\delta^2}{\sigma_n^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{\sigma_n} = \sqrt{\frac{CNR_{16QAM}}{5}} \quad (3.24)$$

(2) CNR と E_b / N_0 の関係

次に 1 ビットの信号エネルギー E_b と雑音電力スペクトル密度 N_0 の比として定義される E_b / N_0 について述べる。カットオフ周波数が $f_b / 2$ のナイキストフィルタを用い、時間間隔 $T_b = 1 / f_b$ で信号（シンボル）を送信している通信路を考える。

複素搬送波 $e^{j\omega_p t}$ を複素信号電圧 $Z (= V_I + jV_Q)$ で振幅変調した搬送波信号電力

P_s は次式で与えられる。

$$P_s = \frac{1}{2} \langle |Z|^2 \rangle \quad (3.25) \quad ((3.18) \text{ と同じ})$$

一方、ベースバンドにおける時間間隔 T_b 内にある複素信号電圧 $Z = V_I + jV_Q$ による信号エネルギー E_s は次式で与えられる。

$$E_s = \langle |Z|^2 \rangle T_b \quad (3.26)$$

これから、 E_s は P_s と次式の関係がある。

$$E_s = \langle |Z|^2 \rangle T_b = 2P_s T_b \quad (3.27)$$

一方、カットオフ周波数が $f_b/2$ のナイキストフィルタを用いた場合、雑音電力 P_N と雑音電力スペクトル密度 N_0 とは以下の関係がある。

$$P_N = \sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0 f_b = \frac{1}{2} \frac{N_0}{T_b} \quad (3.28)$$

これから、

$$CNR = \frac{P_s}{P_N} = \frac{E_s / 2T_b}{N_0 / 2T_b} = \frac{E_s}{N_0} \quad (3.29)$$

1 シンボルに含まれるビット数が b の時、1 ビット当りのエネルギーは

$E_b = E_s / b$ であるから、

$$CNR = \frac{bE_b}{N_0} \rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{CNR}{b} \quad (3.30)$$

以上の 結果および 3.2 節の結果から、各変調信号に対して、 BER 特性と δ / σ_n ,

CNR , E_b / N_0 の関係が求められた。表 3.2 に各変調信号に対する BER 特性の

計算式をまとめて示す。表には64QAM，256QAMの場合についても示す。

表 3.2 各変調信号に対する BER 特性の計算式のまとめ

変調 \ パラメータ	$\frac{\delta}{\sigma_n}$	CNR	$\frac{E_b}{N_0}$
ASK	$Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$	$Q\left(\sqrt{CNR_{ASK}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{E_{b,ASK}}{N_0}}\right)$
BPSK	$Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$	$Q\left(\sqrt{2CNR_{BPSK}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,BPSK}}{N_0}}\right)$
QPSK	$Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$	$Q\left(\sqrt{CNR_{QPSK}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,QPSK}}{N_0}}\right)$
16QAM	$\frac{3}{4}Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$	$\frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{CNR_{16QAM}}{5}}\right)$	$\frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_{b,16QAM}}{N_0}}\right)$
64QAM	$\frac{7}{12}Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$	$\frac{7}{12}Q\left(\sqrt{\frac{CNR_{64QAM}}{21}}\right)$	$\frac{7}{12}Q\left(\sqrt{\frac{2}{7}\frac{E_{b,64QAM}}{N_0}}\right)$
256QAM	$\frac{15}{32}Q\left(\frac{\delta}{\sigma_n}\right)$	$\frac{15}{32}Q\left(\sqrt{\frac{CNR_{256QAM}}{85}}\right)$	$\frac{15}{32}Q\left(\sqrt{\frac{8}{85}\frac{E_{b,256QAM}}{N_0}}\right)$

また、図 3.6 に CNR をパラメータとして計算した各変調信号の BER 特性を示す。ここで以下の点を注意する。表 3.2 では、CNR， E_b / N_0 は変調信号ごとに異なる記号を用いているが（例えば、 CNR_{BPSK} ， $E_{b,BPSK} / N_0$ ，等），これは検討の前提として、信号点間の電圧間隔が変調方式によらず一定値 2δ であるとしたためである。しかし、実際の通信システムでは、CNR や E_b / N_0 は変調信号によらず、むしろ初めに与えられるものであり、変調信号ごとに異なる記号を用いて区別する必要はない。その場合は、むしろ、変調信号ごとに信号点間隔が異なる値になると考えるべきである。図 3.6 ではあらかじめ与えられる CNR にたいして、各変調信号の BER がどのようになるかを示している。

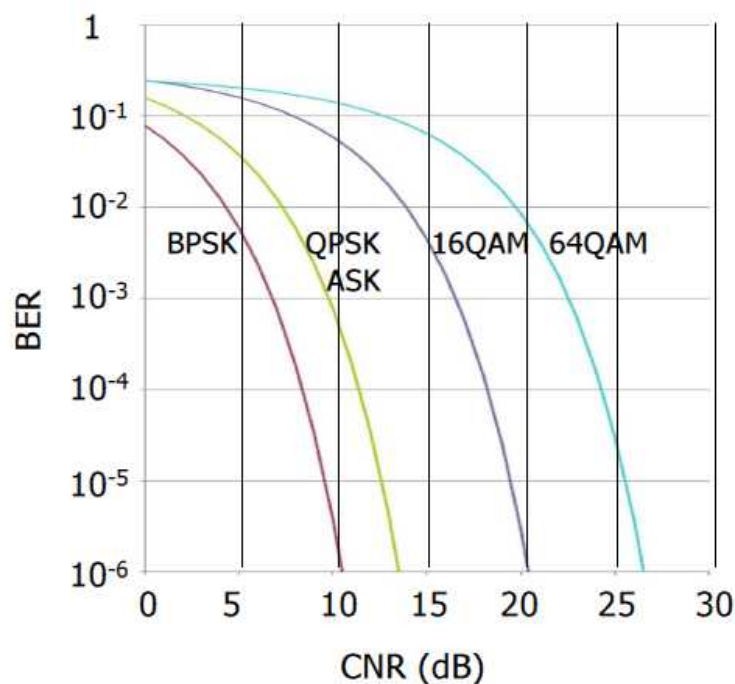


図 3.6 CNR をパラメータとして計算した各変調信号の BER 特性

3.4 CNR と SNR

信号電力と雑音電力の比を与える性能パラメータとして CNR と SNR がある。以下にそれぞれの定義を比較して示す。

$$CNR = \frac{\text{搬送波信号電力}}{\text{搬送波雑音電力}}$$

$$SNR = \frac{\text{I, Qチャンネルにおけるベースバンド信号電力}}{\text{I, Qチャンネルにおけるベースバンド雑音電力}}$$

I, Q チャンネルにおいてベースバンド信号を扱う回路（例えばアナログ・デジタル変換のための ADC ）の雑音性能を評価する場合、評価パラメータとして SNR を用いる必要がある。

各変調信号に対して、 SNR はどのように与えられるのであろうか？
また、 SNR と CNR はどのような関係があるのだろうか？

図 3.7 にここで考察する受信機構成モデルを示す。図において、 $v_r(t)$ は受信機入力端での雑音を含む搬送波電圧、 $v_s(t)$ は搬送波信号電圧、 $v_N(t)$ は搬送波周波数帯の雑音電圧であり、それぞれ次式で与えられる。

$$v_r(t) = v_s(t) + v_N(t) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} v_s(t) &= A \cos(\omega_p t + \theta) \\ &= A \cos(\theta) \cos(\omega_p t) - A \sin(\theta) \sin(\omega_p t) \\ &= V_I \cos(\omega_p t) - V_Q \sin(\omega_p t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$v_N(t) = x_n \cos \omega_p t - y_n \sin \omega_p t \quad (3.33)$$

$$\text{ここで, } \langle x_n^2 \rangle = \langle y_n^2 \rangle = \sigma_n^2 \quad (3.34)$$

$\sigma_n \left(= \sqrt{\langle x_n^2 \rangle} = \sqrt{\langle y_n^2 \rangle} \right)$ は雑音電圧の実効値

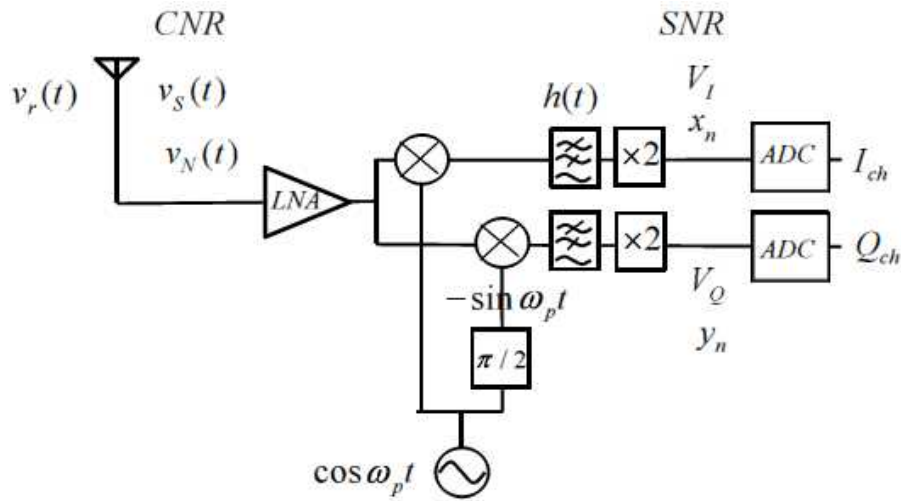


図 3.7 受信機構成モデル

$v_s(t)$ は直交復調器で周波数変換され、I チャンネルにベースバンド信号電圧 V_I 、Q チャンネルにベースバンド信号電圧 V_Q が生じる。また、 $v_N(t)$ から、I チャンネルにベースバンド雑音電圧 x_n 、Q チャンネルにベースバンド雑音電圧 y_n が生じる。

ここでまず、*QPSK* や *QAM* のように I, Q チャンネルを同等に用いる変調信号について検討する。

この場合、 $\langle V_I^2 \rangle = \langle V_Q^2 \rangle$ であることから、搬送波信号電圧 $v_s(t)$ による搬送波信号電力 P_s は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T} \int_T \langle |v_s(t)|^2 \rangle dt = \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \\ &= \frac{1}{2} \langle V_I^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle V_Q^2 \rangle = \langle V_I^2 \rangle = \langle V_Q^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

また、搬送波雑音電圧 $v_N(t)$ による搬送波雑音電力 P_N は式 (3.33)、(3.34) を用いて以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{T} \int_T \langle |v_N(t)|^2 \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \langle x_n^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle y_n^2 \rangle = \langle x_n^2 \rangle = \langle y_n^2 \rangle = \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

式 (3.35)、(3.36) から *CNR* は以下で与えられる。

$$CNR = \frac{P_s}{P_N} = \frac{\langle A \rangle^2 / 2}{\sigma_n^2} = \frac{\langle V_I^2 \rangle}{\sigma_n^2} = \frac{\langle V_Q^2 \rangle}{\sigma_n^2} \quad (3.37)$$

一方、ベースバンド信号電力とベースバンド雑音電力の比で定義される *SNR* は

I チャネルの場合と Q チャネルの場合で等しく以下で与えられる。

$$SNR = \frac{\langle V_I^2 \rangle}{\langle x_n^2 \rangle} = \frac{\langle V_Q^2 \rangle}{\langle y_n^2 \rangle} = \frac{\langle V_I^2 \rangle}{\sigma_n^2} = \frac{\langle V_Q^2 \rangle}{\sigma_n^2} \quad (3.38)$$

式 (3.37) と (3.38) の比較から、*QPSK* や *QAM* 等の I, Q チャネルを同等に用いる変調信号では次式が成り立つ。

$$CNR = SNR \quad (3.39)$$

次に、I, Q チャネルを同等に用いない *BPSK* 変調信号について考える。*BPSK* の場合、式 (3.32) において常に $V_Q = 0$ となっている。これから *BPSK* 変調信号の場合、搬送波信号電力 P_s は以下のように表わされる。

$$P_s = \frac{1}{2} \langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle V_I^2 \rangle \quad (3.40)$$

一方、搬送波雑音電圧 $v_N(t)$ による搬送波雑音電力 P_N は *QPSK* や *QAM* の場合と等しく、式 (3.36) で与えられる。これから、*BPSK* の場合、 CNR_{BPSK} は以下で表わされる。

$$CNR_{BPSK} = \frac{P_s}{P_N} = \frac{\langle A \rangle^2 / 2}{\sigma_n^2} = \frac{\langle V_I^2 \rangle / 2}{\sigma_n^2} \quad (3.41)$$

一方、ベースバンド信号電力とベースバンド雑音電力の比で定義される SNR_{BPSK} は I チャネルにのみ存在し以下で与えられる。

$$SNR_{BPSK} = \frac{\langle V_I^2 \rangle}{\langle x_n^2 \rangle} = \frac{\langle V_I^2 \rangle}{\sigma_n^2} \quad (3.42)$$

式 (3.41) と (3.42) の比較から、*BPSK* では、 CNR_{BPSK} と SNR_{BPSK} の間に次式が成り立つ。

$$CNR_{BPSK} = \frac{1}{2} SNR_{BPSK} \quad (3.43)$$

以上の結果をまとめると、I, Q チャンネルを同等に用いる変調方式であれば $CNR = SNR$ が成り立つ。このような場合として、*QPSK*、*QAM* 変調があるが、後述する *OFDM* 変調も I, Q チャンネルを同等に用いることから、この関係が成り立つ。これに対し、一方のベースバンドチャンネル (I チャンネル) のみを使う

BPSK 変調では $CNR_{BPSK} = \frac{1}{2} SNR_{BPSK}$ となる。

付録 E 相補累積分布関数 $Q(\rho)$ と誤差補関数 $\text{erfc}(\rho')$

熱雑音では電圧値 x に対する確率密度分布は正規分布となる。 x を変数として、正規分布確率密度関数 $P(x)$ は式 (A-1) で与えられる。またその特性は図 E. 1 のようになる。ただし、以下の検討では分散（の平方根） $\sigma=1$ としている（電圧値は σ で規格化されていると考える）。

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{E. 1})$$

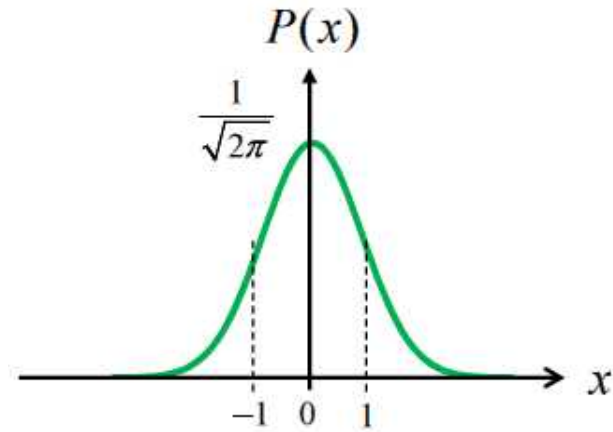


図 E. 1 正規分布確率密度関数 $P(x)$ ($\sigma=1$ の場合)

次に、図 E. 2 に示されるような $P(x)$ の $x \geq \rho$ となる部分の累積確率を求める。

これは、 ρ の関数である次式の $Q(\rho)$ で与えられる。 $Q(\rho)$ を相補累積分布関数と呼ぶ。

$$Q(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} P(x) dx = \int_{\rho}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{E. 2})$$

$$\approx \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{0.7}{\rho^2}\right) e^{-\rho^2/2} \quad (\rho \geq 2)$$

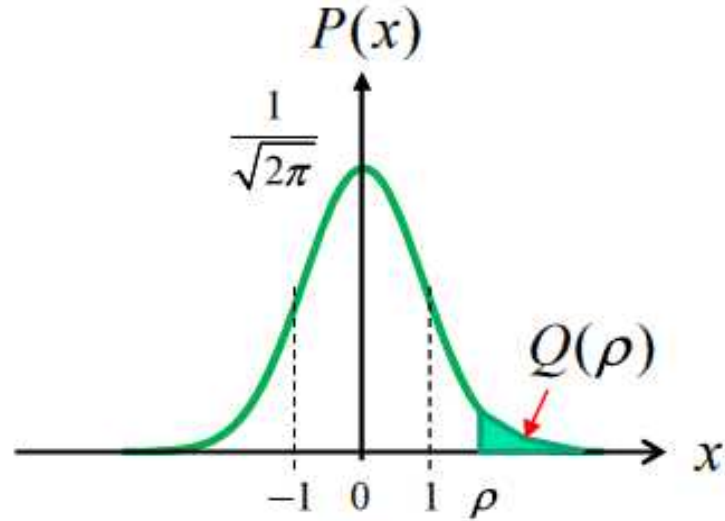


図 E.2 相補累積分布関数 $Q(\rho)$ ($x \geq \rho$ となる部分の累積確率)

本書では、熱雑音による検出誤りを与える関数として相補累積分布関数 $Q(\rho)$ を用いているが、他の通信の教科書では誤差補関数 $\text{erfc}(\rho')$ を用いる場合も多く見られる。以下で、 $Q(\rho)$ と $\text{erfc}(\rho')$ との関係を示しておく。

まず、全確率は 1 であることから、以下のような式変形を行い、関数 $R(u)$ を以下のように導出する。

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{E. 3})$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du = \int_0^{\infty} R(u) du$$

$$\rightarrow R(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \quad (\text{E. 4})$$

図 E.3 に関数 $R(u)$ を用いた場合の $erfc(\rho')$ を示す。図 E.3 に示される $erfc(\rho')$ は次式で与えられ、 $u \geq \rho'$ となる部分の累積確率を与えるものである。

$$erfc(\rho') = \int_{\rho'}^{\infty} R(u) du = \int_{\rho'}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \quad (\text{E. 5})$$

次に、以下の式変形を行うことで $Q(\rho)$ と $erfc(\rho')$ の関係式が求まる。

$$\begin{aligned} Q(\rho) &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\frac{\rho}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{E. 6})$$

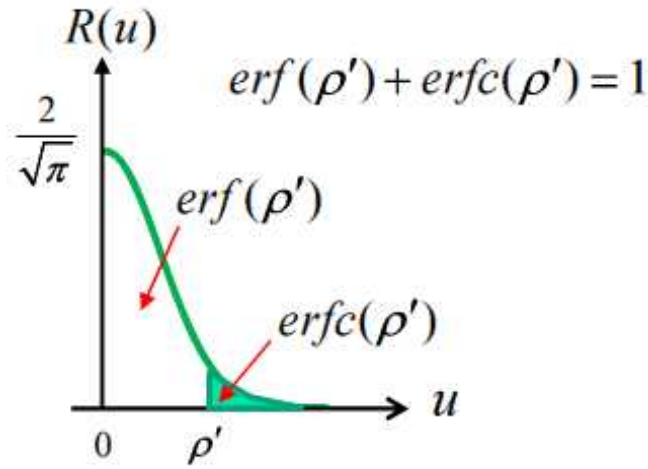


図 E.3 関数 $R(u)$ を用いた場合の誤差補関数 $erfc(\rho')$