

7 適応型周波数領域等化 -構成と動作-

7.1 周波数領域等化 (FDE) の概要

伝送路全体の周波数応答が $H_u(\omega)$ であり、また雑音（の周波数スペクトル） $N(\omega)$ を考慮するとき、受信した複素ベースバンド信号の周波数スペクトル $U'(\omega)$ は以下の雑音を含む式で表わされる。なお、以下において、 $N(\omega)$ や $N(k\omega_0)(=N(k))$ の表記は雑音スペクトルを表わすのに対し、 N_p の表記は離散信号の数（チャネル数、サンプリング数）を表わしているので、紛らわしいが留意願う。

$$U'(\omega) = H_u(\omega)U(\omega) + N(\omega) \quad (7.1)$$

この時、6章、式(6.12)で表わした k 番目チャネル（角周波数 $k\omega_0$ に対応）の送信信号のスペクトル成分 $c_k = U(k)$ 、および受信信号のスペクトル成分 $c'_k = U'(k)$ には次式の関係が成り立つ。

$$c'_k = H_u(k)c_k + n_k \quad (7.2)$$

ここで、 n_k は $n_k = N(k\omega_0) = N(k)$ であり、 k 番目チャネル周波数 $k\omega_0$ に対応した雑音電圧 $n_k e^{j k \omega_0}$ の複素振幅である。また、 $H_u(k) = H_u(k\omega_0)$ は 6 章、式(6.16)で与えられる伝送路全体の特性で、特性が判ったパイロット信号を用いて別に求められる。

ここで、 k 番目チャネルに対する等化重み $W(k)$ を $H_u(k)$ を用いて次式で与える。

$$W(k) = \frac{1}{H_u(k)} = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2} \quad (7.3)$$

式 (7.3) を用いることにより, 伝送路全体の特性を補正したスペクトル成
 $c_{R,k} = U_R(k)$ は以下のように求めることができる。

$$c_{R,k} = W(k)c'_k = \frac{c'_k}{H_u(k)} = c_k + \frac{n_k}{H_u(k)} \quad (7.4)$$

雑音成分 n_k が十分小さく, その影響を無視できる時, $c_{R,k}$ は送信された信号のスペクトル成分 c_k になり, 正しい復調を行うことができる。このような信号補正を等価とよび, 特に周波数領域でこれを行うのを周波数領域等化(FDE; Frequency Domain Equalization) と呼ぶ。

特に, 上記のように式 (7.4) に従い補正をおこなう方式をゼロフォーシング等化(ZF: Zero Forcing Equalization) と呼ぶ。ZF 等価は歪みを受けた受信信号のスペクトル成分 c'_k を完全に補正することができる利点がある。しかし, $H_u(k)$ で n_k を割るため, $H_u(k)$ が非常に小さな値になっている(ディップ)部分で, 雜音の影響が強調されてしまい, 結果として CNR が悪くなる場合がある。

ZF 等化における雑音強調の問題を軽減するための等化方式として, 最小二乗平均誤差(MMSE: Minimum Mean Square Error)を用いた MMSE 等化がある。MMSE 等化の等化重み $W(k)$ は次式で与えられる。導出詳細は付録 H に示す。

$$W(k) = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{\langle |n_k|^2 \rangle}{\langle |c_k|^2 \rangle}} = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{CNR}} \quad (7.5)$$

ここで, $\langle \rangle$ は期待値(アンサンブル平均値)を計算する演算を意味する。雑音成分が十分小さく無視できる時, 式 (7.5) は式 (7.3) に等しくなる。式 (7.5)

の $W(k)$ を用いて、伝搬路の特性を補正した信号スペクトル成分 $c_{R,k} = U_R(k)$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} c_{R,k} &= W(k)c'_k \\ &= \frac{|H_u(k)|^2}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{CNR}} c_k + \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{CNR}} n_k \end{aligned} \quad (7.6)$$

MMSE 等化の場合、その導出原理から、信号のスペクトル成分に歪みは残っているが、付加雑音の大きさを加味した上で送信した信号のスペクトル c_k にできるだけ近い補正後のスペクトル $c_{R,k}$ が得られる。

図 7.1 に ZF 等化および MMSE 等化の様子を示す。ZF 等化では伝送路の歪み（周波数選択性フェージング）の影響を完全に無くすことができるが、ディップ部分で雑音強調が生じる。これに対し、MMSE 等化の場合、伝送路の歪みは完全には補正できないが、雑音強調の問題は無く、結果として C/N が良くなる。

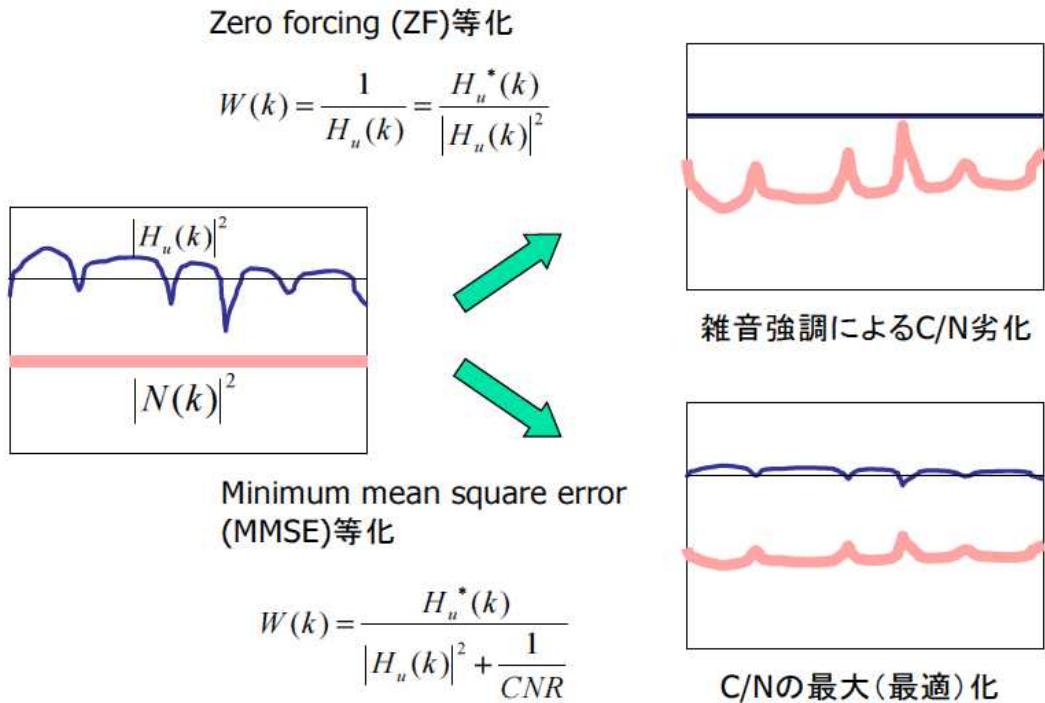


図 7.1 ZF 等化と MMSE 等化

7.2 パイロット信号を用いた適応型周波数領域等化^[17]

図 7.2 にパイロット信号を評価して、ZF あるいは MMSE の等化重み $W(k)$ を求めるチャネル評価回路 (Channel Estimation) の構成と信号の流れを示す。

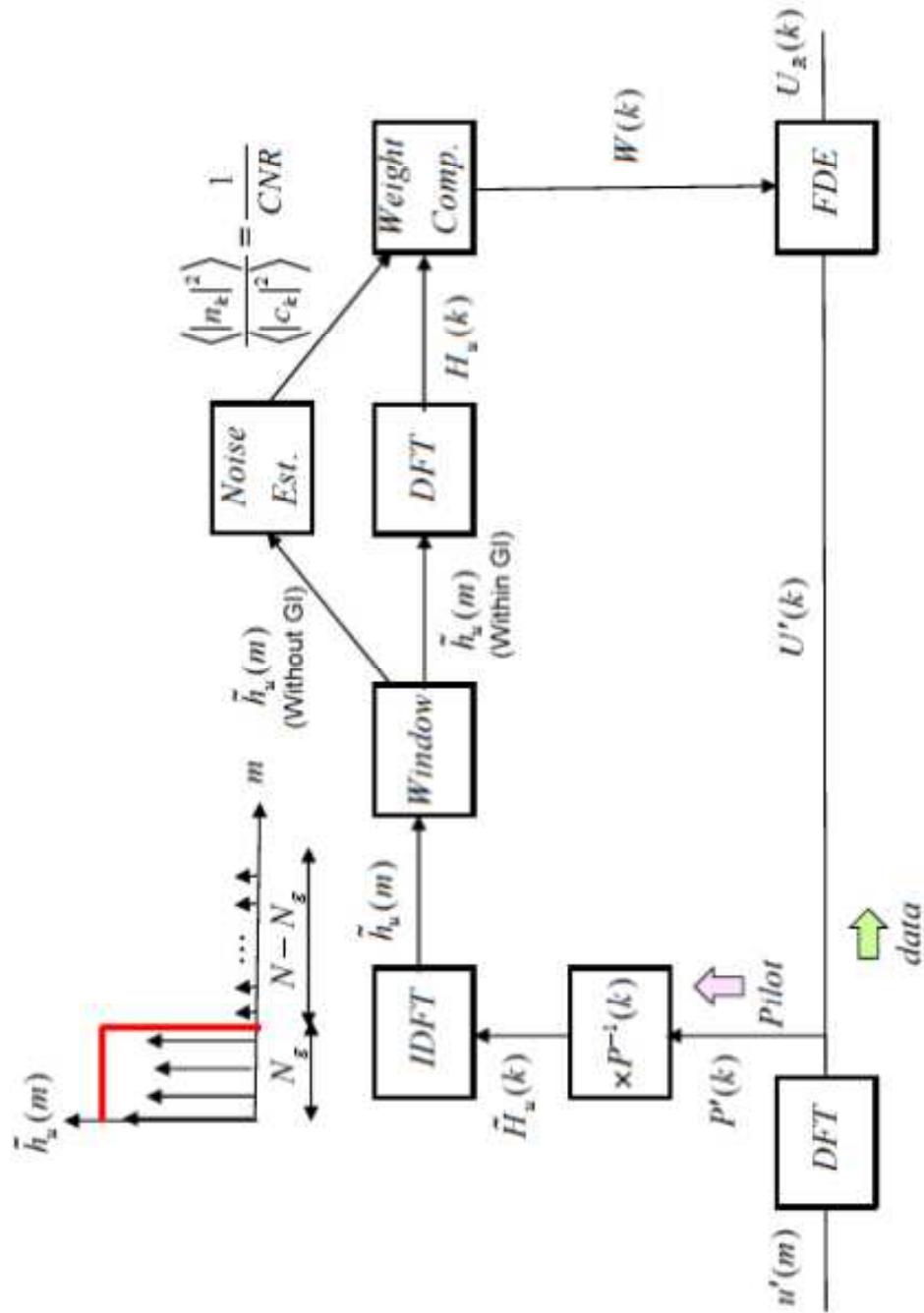


図 7.2 チャネル評価回路 (Channel Estimation) の構成と信号の流れ

送信されたパイロット信号の周波数スペクトル $P(k) = c_{p,k}$ は、伝送路の歪み $H_u(k)$ を受け、さらに雑音 $N(k) = n_k$ が付加され、受信周波数スペクトル $P'(k) = c'_k$ は次式で表せる。

$$P'(k) = H_u(k)P(k) + N(k) \quad (7.7)$$

$P'(k)$ を $P(k)$ で割り算することにより、

$$\begin{aligned} \frac{P'(k)}{P(k)} &= \tilde{H}_u(k) = H_u(k) + \frac{N(k)}{P(k)} \\ &= H_u(k) + \frac{n_k}{c_{p,k}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

式 (7.8) で与えられる $\tilde{H}_u(k)$ は伝送路全体の周波数応答 $H_u(k)$ とパイロット信号のスペクトル成分 $c_{p,k}$ で規格化された雑音 $\frac{n_k}{c_{p,k}}$ とからなっている。なお、パイロット信号の周波数スペクトル成分は $|P(k)|^2 = |c_{p,k}|^2 = |c_p|^2$ (一定値) となるようあらかじめ選ばれている。また、雑音は白色雑音であり、

$$\langle |N(k)|^2 \rangle = \langle |n_k|^2 \rangle = \frac{\sigma_n^2}{N_p}$$

である。ここで、 σ_n^2 は雑音分散、 $N(k)$ は雑音の周波数スペクトルの k 番目成分、 N_p は雑音の周波数スペクトル成分の数 (= 雑音の離散時間成分の数) である。

次に $\tilde{H}_u(k)$ を離散逆フーリエ変換 (IDFT) することにより、時間応答 $\tilde{h}_u(m)$ が得られる。図 7.2 中に $\tilde{h}_u(m)$ の時間応答を示す。マルチパス伝送による遅延波はガードインターバル内 ($0 \leq m < N_g$) のインパルスとして存在し、それ以外 ($N_g \leq m \leq N-1$) には存在しないとすると、雑音の影響を含まない伝送路全体

の時間応答 $h_u(m)$ は次式で与えられる。

$$h_u(m) \approx \begin{cases} \tilde{h}_u(m) & (0 \leq m < N_g) \\ 0 & (N_g \leq m \leq N_p - 1) \end{cases} \quad (7.9)$$

ここで、ガードインターバル内 ($0 \leq m < N_g$) における雑音成分の影響は十分小さく無視できるものとする。次に式 (7.9) で与えられる $h_u(m)$ を離散フーリエ変換 (DFT) することにより伝送路全体の周波数応答 $H_u(k)$ が得られる。一方、 $\tilde{h}_u(m)$ のガードインターバルを超えた部分 ($N_g \leq m \leq N_p - 1$) の成分は周波数スペクトル領域において $c_{p,k} = P(k)$ で規格化された雑音によるものであり、以下の関係式が成り立つ。導出詳細は付録 I に示す。

$$\frac{1}{CNR} = \frac{1}{N_p(N_p - N_g)} \sum_{m=N_g}^{N_p-1} \left| \tilde{h}_u(m) \right|^2 \approx \frac{1}{(N_p - N_g)^2} \sum_{m=N_g}^{N_p-1} \left| \tilde{h}_u(m) \right|^2 \quad (7.10)$$

なお、上式における近似は $N_g \ll N_p$ の場合に得られる。

以上の導出データを用いて、等化重み $W(k)$ が以下のように与えられる。

(ZF 等化)

$$W(k) = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2} \quad (7.11)$$

(MMSE 等化)

$$W(k) = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{CNR}} = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{(N-N_g)^2} \sum_{m=N_g}^{N_p-1} |\tilde{h}_u(m)|^2} \quad (7.12)$$

式(7.12)の導出では、パワーロット信号の周波数スペクトル成分の振幅二乗の期待値がチャネルによらず一定 ($|c_{pk}|^2 = |c_p|^2 = \text{一定}$) であるとしているが、データ信号の場合には必ずしもそれはいえない ($|c_k|^2$ がチャネルによって異なる)。しかし、その場合でも式(7.12)で得られる $W(k)$ は良い近似で用いることができると考えられる。

付録 H MMSE 等化重みの導出

送信信号の k 番目チャネルのスペクトル成分 c_k と MMSE 等化による補正後の信号の k 番目チャネルのスペクトル成分 $c_{R,k}$ の差の二乗平均誤差 J は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 J &= \langle |c_k - c_{R,k}|^2 \rangle \\
 &= \langle |c_k - W(k)c'_k|^2 \rangle \\
 &= \langle |c_k - W(k)H_u(k)c_k - W(k)n_k|^2 \rangle \\
 &= \langle (c_k(1 - W(k)H_u(k)) - W(k)n_k)(c_k(1 - W(k)H_u(k)) - W(k)n_k)^* \rangle \\
 &= \langle |c_k|^2 |1 - W(k)H_u(k)|^2 + |W(k)|^2 |n_k|^2 \rangle \\
 &= \langle |c_k|^2 \rangle |1 - W(k)H_u(k)|^2 + \langle |n_k|^2 \rangle |W(k)|^2
 \end{aligned} \tag{H. 1}$$

$\langle \rangle$ は期待値（アンサンブル平均値）を計算する演算を意味する。 $\langle n_k \rangle = 0$ を用いている。

次に、複素関数 $W(k)$, $H_u(k)$ を以下のように与える。

$$\left. \begin{array}{l} W(k) = x + jy \\ H_u(k) = a + jb \end{array} \right\} \tag{H. 2}$$

次に、 J を最小にする x および y の値を求める。

式(H. 1)に式(H. 2)を代入すると以下となる。

$$\begin{aligned}
 J &= \langle |c_k|^2 \rangle |1 - (x + jy)(a + jb)|^2 + \langle |n_k|^2 \rangle |x + jy|^2 \\
 &= \left(\langle |c_k|^2 \rangle (a^2 + b^2) + \langle |n_k|^2 \rangle \right) (x^2 + y^2) - 2a \langle |c_k|^2 \rangle x + 2b \langle |c_k|^2 \rangle y + \langle |c_k|^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{H. 3}$$

誤差 J が最小となる条件は以下で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (H. 4)$$

式(H. 4)に式(H. 3)を代入して x, y について解くと

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{(a^2 + b^2) + \frac{\langle |n_k|^2 \rangle}{\langle |c_k|^2 \rangle}} \\ y = \frac{-b}{(a^2 + b^2) + \frac{\langle |n_k|^2 \rangle}{\langle |c_k|^2 \rangle}} \end{array} \right\} \quad (H. 5)$$

式(H. 5)から、

$$W(k) = x + jy = \frac{a - jb}{(a^2 + b^2) + \frac{\langle |n_k|^2 \rangle}{\langle |c_k|^2 \rangle}} = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{\langle |n_k|^2 \rangle}{\langle |c_k|^2 \rangle}} \quad (H. 6)$$

ここで、

$$\left. \begin{array}{l} \langle |n_k|^2 \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{k=\frac{-N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}-1} |n_k|^2 = \frac{\sigma_n^2}{N_p} = \frac{1}{N_p} P_N \\ \langle |c_k|^2 \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{k=\frac{-N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N_p} P_S \end{array} \right\} \quad (H. 7)$$

ここで、 P_N は雑音電力、 P_S は信号電力、 R_L は負荷抵抗

式 (H. 6) に式 (H. 7) を代入すると

$$\begin{aligned}
 W(k) &= \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{\langle |n_k|^2 \rangle}{\langle |c_k|^2 \rangle}} = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{P_N}{P_S}} = \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{SNR}} \\
 &= \frac{H_u^*(k)}{|H_u(k)|^2 + \frac{1}{CNR}}
 \end{aligned} \tag{H. 8}$$

付録 I 式 (7.10) の導出

雑音の周波数スペクトル成分 $N(k)$ と時間応答成分 $n(m)$ は、離散フーリエ変換で関係付けられ、次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned}
 n(m) &= \sum_{k=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}-1} N(k) e^{j2\pi k \frac{m}{N}} \\
 N(k) &= \frac{1}{N_p} \sum_{m=0}^{N_p-1} n(m) e^{-j2\pi k \frac{m}{N}}
 \end{aligned} \right\} \tag{I. 1}$$

雑音が白色雑音とすると、式 (I. 1) から

$$\left. \begin{aligned}
 \langle |n(m)|^2 \rangle &= N_p \langle |N(k)|^2 \rangle = \sigma_n^2 \\
 \langle |N(k)|^2 \rangle &= \frac{1}{N_p} \langle |n(m)|^2 \rangle = \frac{1}{N_p} \sigma_n^2
 \end{aligned} \right\} \tag{I. 2}$$

次に、パイロット信号の周波数スペクトル成分 $c_{p,k} = P(k)$ で規格化（割り算）した雑音の周波数スペクトル成分 $\frac{N(k)}{c_{p,k}}$ を考える。この時、時間応答成分を $n'(m)$ とすると離散フーリエ変換式は以下となる。

$$\left. \begin{aligned}
n'(m) &= \sum_{k=-\frac{N_p}{2}}^{\frac{N_p}{2}-1} \frac{N(k)}{c_{p,k}} e^{j2\pi k \frac{m}{N_p}} \\
\frac{N(k)}{c_{p,k}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{m=0}^{N_p-1} n'(m) e^{-j2\pi k \frac{m}{N_p}}
\end{aligned} \right\} \quad (I.3)$$

ここで、パイルオフ信号の周波数スペクトル成分の振幅は k によらず一定値

$|c_{p,k}| = |c_p|$ となるように選ばれているならば、式(I.2)の関係を使って、

$$\begin{aligned}
\langle |n'(m)|^2 \rangle &= N_p \left\langle \left| \frac{N(k)}{c_{p,k}} \right|^2 \right\rangle = N_p \frac{\langle |N(k)|^2 \rangle}{|c_p|^2} \\
&= \frac{\sigma_n^2}{|c_p|^2} = N_p \frac{P_N}{P_S} = N_p \frac{1}{CNR}
\end{aligned} \quad (I.4)$$

ここで、 P_N は雑音電力、 P_S はパイルオフ信号電力

ガードインターバルを超えた部分 ($N_g \leq m \leq N_p - 1$) で、 $n'(m) = \tilde{h}_u(m)$ なので

$$\langle |n'(m)|^2 \rangle = \left\langle \left| \tilde{h}_u(m) \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{N_p - N_g} \sum_{m=N_g}^{N_p-1} \left| \tilde{h}_u(m) \right|^2 \quad (I.5)$$

式(I.4)、式(I.5)から

$$\frac{1}{N_p - N_g} \sum_{m=N_g}^{N_p-1} \left| \tilde{h}_u(m) \right|^2 = N_p \frac{1}{CNR} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{CNR} = \frac{1}{N_p(N_p - N_g)} \sum_{m=N_g}^{N_p-1} \left| \tilde{h}_u(m) \right|^2 \quad (I.6)$$