

## 6 発振器と位相雑音

### 6.1 発振器の動作メカニズム

トランジスタを用いた発振器の動作メカニズムは、(a) 正帰還発振の考え方、および、(b) 負抵抗発振の考え方で説明される。すなわち、同じ発振動作を2つの考え方で説明できる。

#### (a) 正帰還発振の考え方

図6.1は正帰還発振の考え方で説明するための発振回路の構成モデルである。回路は増幅度 $\alpha$ の増幅素子と帰還量 $\beta$ の帰還回路から成るとする。

初めに、増幅素子の入力に電圧 $v_{in}$ が入力されると、増幅されて出力に電圧

$v_{out} = \alpha v_{in}$ があらわれる。次に、帰還回路により $v_{out}$ の一部は帰還され、入力側に

$v'_{in} = \beta v_{out} = \alpha \beta v_{in}$ があらわれる。すなわち、次式の関係がある。

$$\left. \begin{array}{l} v_{out} = \alpha v_{in} \\ v'_{in} = \beta v_{out} = \alpha \beta v_{in} \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

ここで、 $v'_{in}$ が初めの $v_{in}$ に対して、

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{v'_{in}}{v_{in}} \right| = |\alpha \beta| \geq 1 \\ \angle \frac{v'_{in}}{v_{in}} = \angle \alpha \beta = 2n\pi \quad (n \text{は整数}) \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

となるとき、発振が成長する。

図 6.2 に発振が成長する様子を示す。回路中の雑音が発振を開始するための種信号となる。発振が成長すると増幅度  $\alpha$  は飽和し、最終的には、以下の条件で発振は定常状態となる。

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha\beta|=1 \\ \angle\alpha\beta=2n\pi \quad (n \text{は整数}) \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

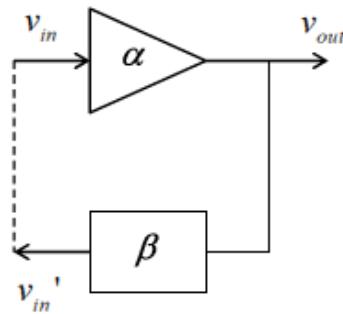


図 6.1 正帰還発振の考え方で説明するための発振回路の構成モデル

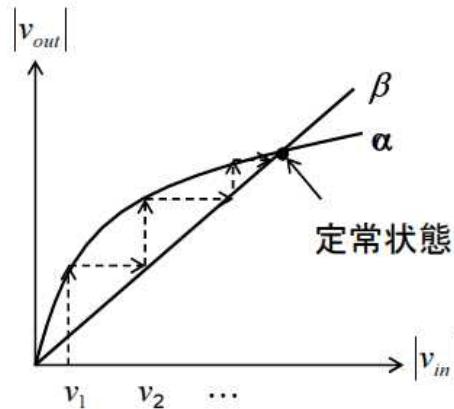


図 6.2 発振の成長と定常状態の様子

### (b) 負抵抗発振の考え方

図 6.3 は負抵抗発振の考え方で説明するための発振回路の構成モデルである。回路は負抵抗  $-r$ 、負荷抵抗  $R$ 、および  $L$ 、 $C$  共振回路から成る。

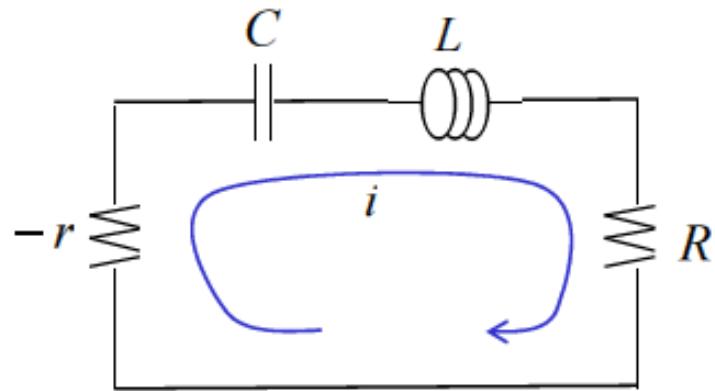


図 6.3 負抵抗発振の考え方で説明するための発振回路の構成モデル

図 6.3において、キルヒ霍フの法則から次式が成り立つ。

$$-ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (6.4)$$

電流  $i(t)$  を

$$i(t) = I e^{pt} \quad (6.5)$$

とすると、

$$(-r + \frac{1}{pC} + pL + R)I e^{pt} = 0 \quad (6.6)$$

$I \neq 0$  で、上式が成立するためには、

$$p^2 LC + pC(R - r) + 1 = 0 \quad (6.7)$$

となり、これを解けば、

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r-R}{2L} \pm j\omega \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(r-R)^2}{4L^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

従って、

$$i(t) = I e^{\frac{r-R}{2L}t} e^{\pm j\omega t} \quad (6.9)$$

式 (7.9) から、 $|r| = r > R$  なら発振が成長する。

負抵抗  $-r$  は電流振幅の関数であり、振幅増大に伴い  $|r| = r$  の値が減少し、

$|r| = r = R$  となったところで次式が得られ、発振は定常状態となる。

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= I e^{\pm j\omega_0 t} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

## 6.2 発振器の Q 値と周波数安定性

負抵抗発振回路において、出力（負荷）側回路を取り出して図 6.4 に示す。また、図 6.5 に出力側回路を見込むインピーダンス  $Z$  の位相角  $\angle Z(\omega) = \theta(\omega)$  の様子を示す。

インピーダンス  $Z$  は周波数  $\omega$  の関数として次式で与えられる。

$$Z(\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (6.11)$$

ここで、

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} \quad (6.12)$$

として、式 (6.11) に代入すると、 $Z(\omega)$  は次式で与えられる。

$$Z(\omega) = R \left( 1 + jQ_L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \quad (6.13)$$

$\omega_0$  は共振角周波数 (発振角周波数でもある)、 $Q_L$  は負荷  $Q$  である。共振と  $Q$  値については付録 F に詳述する。

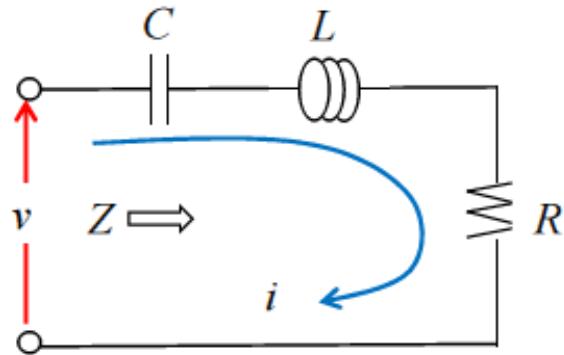


図 6.4 負抵抗発振回路の出力 (負荷) 側回路

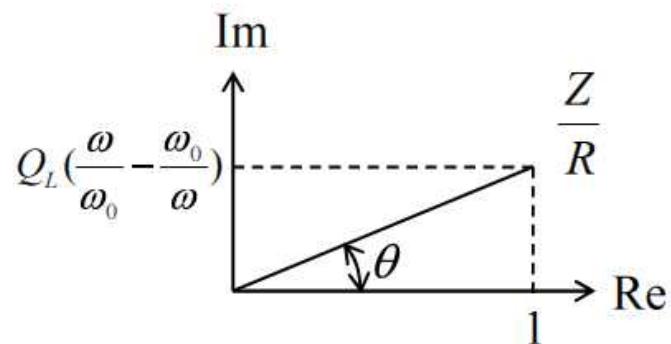


図 6.5 インピーダンス  $Z$  の位相角  $\angle Z(\omega) = \theta(\omega)$

図 6.5 から、インピーダンス  $Z$  の位相角  $\angle Z(\omega) = \theta(\omega)$  は以下で与えられる。

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left( Q_L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \quad (6.14)$$

ここで、共振周波数の近傍 ( $\omega \approx \omega_0$ ) を考えると、 $\theta(\omega)$  は次式のように近似される。

$$\theta(\omega) \approx Q_L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \approx Q_L \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0} \quad (6.15)$$

さらに、 $\theta(\omega)$  を  $\omega$  について微分すると、 $Q_L$  について次式が得られる。

$$Q_L = \frac{\omega_0}{2} \frac{d\theta}{d\omega} \quad (6.16)$$

電源電圧や温度の変化などによって回路定数が変動し、その結果、回路の位相角  $\theta$  が変動すれば  $\theta = 0$  となるように発振周波数が変化する。式 (6.16) を用いると、 $\theta$  の微少変動  $\Delta\theta$  による発振周波数  $\omega_0$  の変化  $\Delta\omega$  は次式で与えられる。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\omega_0} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{\Delta\theta}{\omega_0} = \frac{\Delta\theta}{2Q_L} \quad (6.17)$$

上式から、 $Q_L$  が大きい程  $\Delta\omega$  が小さくなる、すなわち、 $Q_L$  が大きい程発振周波数の安定度が増大する。

### 6.3 発振器の位相雑音

#### 6.3.1 位相雑音とは

周波数  $\omega_0$  で定常発振している発振器が雑音の影響を受けると、発振電圧  $v_p(t)$

は振幅  $A(t)$ ，位相  $\varphi(t)$  が雑音によりゆらいだものとして次式で表わされる。

$$v_p(t) = A(t) \cos(\varphi(t)) \quad (6.18)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \theta_n(t) \quad (6.19)$$

ここで， $\varphi(t)$  は累積位相， $\theta_n(t)$  は瞬時位相である。図 6.6 に雑音による  $\varphi(t)$  のゆらぎの様子を，図 6.7 に雑音による  $\theta_n(t)$  のゆらぎの様子を示す。 $\theta_n(t)$  のゆらぎが位相雑音と呼ばれるゆえんである。

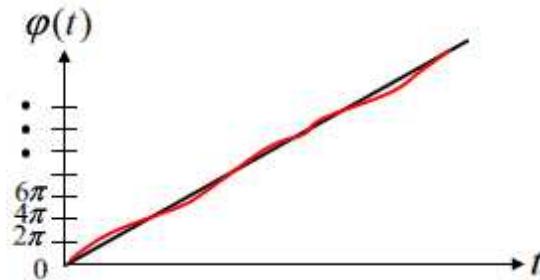


図 6.6 雑音による  $\varphi(t)$  のゆらぎの様子

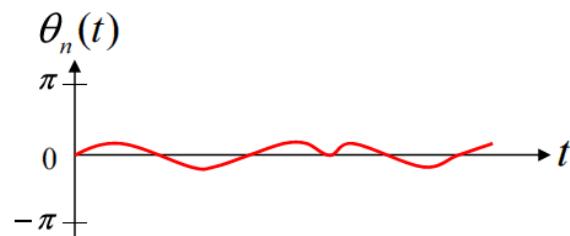


図 6.7 雑音による  $\theta_n(t)$  のゆらぎの様子 (位相雑音)

### 6.3.2 位相雑音の発生メカニズムとその導出

ここでは，図 6.8 の閉ループ回路を用いて位相雑音の発生メカニズムおよびその導出について述べる。

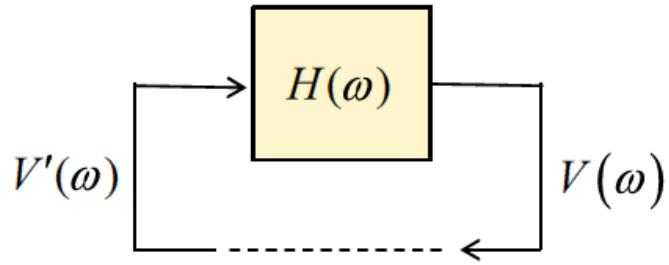


図 6.8 閉ループ回路モデル

図において,  $V(\omega)$ ,  $V'(\omega)$  は電圧スペクトル,  $H(\omega)$  は発振回路の伝達関数の周波数応答であり, これらの間には次式の関係がある。

$$V(\omega) = H(\omega)V'(\omega) \quad (6.20)$$

ここで,

$$(I) \quad \left| \frac{V(\omega)}{V'(\omega)} \right| = |H(\omega)| > 1 \quad \text{かつ} \quad \angle H(\omega) = 0 \quad \text{の時, 発振が成長し,}$$

$$(II) \quad \left| \frac{V(\omega)}{V'(\omega)} \right| = |H(\omega)| = 1 \quad \text{かつ} \quad \angle H(\omega) = 0 \quad \text{となる周波数} \omega_0 \text{ で定常発振する。}$$

厳密には,  $\angle H(\omega) = 2n\pi$  ( $n$  : 整数) であるが, ここでは  $n = 0$  とする。ここで,

$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_H(\omega)}$  と表わすと, 定常発振している時, 次式が成り立つ。

$$|H(\omega_0)| = 1 \quad \text{かつ} \quad \angle H(\omega_0) = \theta_H(\omega_0) = 0 \quad (6.21)$$

定常発振している時, 図 6.9 に示す様に, 閉ループ中に雑音 (電圧スペクトル  $v_n(\omega)$ ) が存在すると  $V(\omega)$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} V'(\omega) = V(\omega) + v_n(\omega) \\ V(\omega) = H(\omega)V'(\omega) \end{array} \right\} \rightarrow V(\omega) = \frac{H(\omega)}{1-H(\omega)}v_n(\omega) \quad (6.22)$$

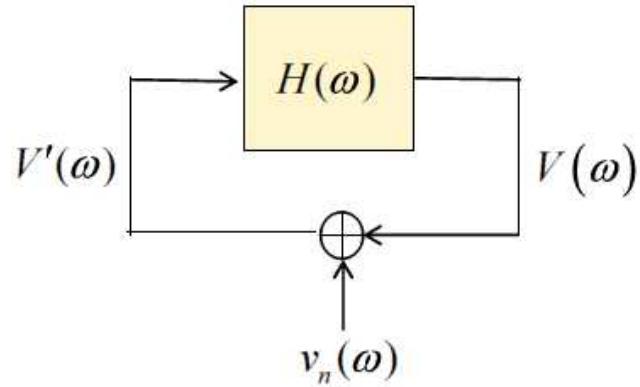


図 6.9 雑音  $v_n$  が存在する閉ループ回路モデル

この時,  $\omega \neq \omega_0$  の周波数においても発振器の出力電圧  $V(\omega)$  は 0 でない値を持つことになる。他の言い方をすると, 雑音  $v_n(\omega)$  の存在により, 周波数が  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$  においても  $V(\omega_0 + \Delta\omega)$  は 0 でない値を持つ。

$\Delta\omega \ll \omega_0$  であることを考慮し,  $H(\omega) = H(\omega_0 + \Delta\omega)$  を  $\Delta\omega$  についてテーラー展開し,  $\Delta\omega$  の 1 次の項までを取ると,

$$\begin{aligned} H(\omega_0 + \Delta\omega) &\approx H(\omega_0) + \Delta\omega \frac{\partial H(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ &= \left| H(\omega_0) \right| e^{j\theta_H(\omega_0)} + \Delta\omega \left( \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} e^{j\theta_H(\omega)} + j \frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \left| H(\omega) \right| e^{j\theta_H(\omega)} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \\ &= 1 + \Delta\omega \left( \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} + j \frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \quad (6.23)$$

これを式 (6.22) に代入することにより,  $V(\omega) = V(\omega_0 + \Delta\omega)$  は次式となる。

$$V(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{H(\omega_0 + \Delta\omega)}{1 - H(\omega_0 + \Delta\omega)} v_n(\omega) = \frac{1 + \Delta\omega \left( \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} + j \frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0}}{-\Delta\omega \left( \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} + j \frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0}} v_n(\omega) \quad (6.24)$$

ここで,  $\frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$ ,  $\frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$  は付録 G から次式で与えられる。

$$\frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{2Q_L}{\omega_0} \quad (6.26)$$

式 (6.25), (6.26) を式 (6.24) に代入して次式が得られる。

$$V(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{1 + j\Delta\omega \frac{2Q_L}{\omega_0}}{-j\Delta\omega \frac{2Q_L}{\omega_0}} v_n(\omega) \approx \frac{1}{-j\Delta\omega \frac{2Q_L}{\omega_0}} v_n(\omega) = j \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right) \frac{1}{\Delta\omega} v_n(\omega) \quad (6.27)$$

上式 2 行目の近似は,  $\Delta\omega \ll \omega_0$  から得られる。

上式は発振周波数  $\omega_0$  からの離調周波数  $\Delta\omega$  の関数と見ることができるので,

$V(\omega_0 + \Delta\omega) \rightarrow V(\Delta\omega)$  と置き換えることにより, あらためて次式が得られる。

$$V(\Delta\omega) = j \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right) \frac{1}{\Delta\omega} v_n(\omega) \quad (6.28)$$

上式(6.28)は雑音 ((電圧スペクトル  $v_n(\omega)$ )) が存在する場合に発振器の出力に現われる雑音電圧スペクトルをあたえるものである。

ここで, 負荷 (抵抗  $R$ ) に供給される発振信号電圧  $v_p(t)$  が以下で与えられる時,

$$v_p(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) \quad (6.29)$$

式(6.28)で与えられる  $V(\Delta\omega)$  を発振信号電圧の振幅  $A_0$  で規格化し, さらにこれを 2 乗することで次式が得られる。

$$S_\theta(\Delta\omega) = \left| \frac{V(\Delta\omega)}{A_0} \right|^2 = \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right)^2 \frac{1}{\Delta\omega^2} \frac{\langle |v_n(\omega)|^2 \rangle}{A_0^2} \quad (6.30)$$

ここで, 雑音についてはアンサンブル平均  $\langle |v_n(\omega)|^2 \rangle$  を用いて表わしている。

$v_n(\omega)$  が負荷の抵抗  $R$  からの熱雑音によるものとすると, ナイキストの定理から次式の関係がある。

$$\frac{\langle |v_n(\omega)|^2 \rangle}{4R} = k_B T \quad \rightarrow \quad \langle |v_n(\omega)|^2 \rangle = 4Rk_B T \quad (6.31)$$

$k_B$  はボルツマン定数,  $T$  は絶対温度

また負荷に供給される発振信号電力  $P_0$  と電圧振幅  $A_0$  には次式の関係がある。

$$P_0 = \frac{A_0^2}{2R} \quad \rightarrow \quad A_0^2 = 2RP_0 \quad (6.32)$$

式 (6.30) に式 (6.31), (6.32) を代入することにより,  $S_\theta(\Delta\omega)$  に関する次式が得られる。

$$S_\theta(\Delta\omega) = \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right)^2 \frac{1}{\Delta\omega^2} \frac{2k_B T}{P_0} \quad (6.33)$$

$S_\theta(\Delta\omega)$  は負荷に供給される発振信号電力  $P_0$  で規格化された離調周波数  $\Delta\omega$  に

おける位相雑音電力スペクトルを与えるものである。図 6.10 に  $S_\theta(\Delta\omega)$  の様子

を模式的に示す。 $|\Delta\omega| \geq B = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}Q_L}$  では熱雑音によるノイズフロアの値  $\frac{k_B T}{P_0}$  と

なる。

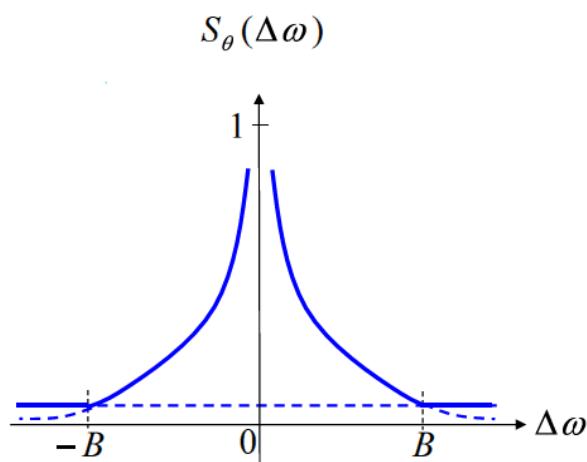


図 6.10  $S_\theta(\Delta\omega)$  の様子を示す模式図

$S_\theta(\Delta\omega)$  を全離調周波数範囲 ( $-B \sim B$ ) で積分したものは位相雑音電力と信号電

力の比  $CNR_\theta$  (実際には  $\frac{1}{CNR_\theta}$ ) を与える。

上式(6.33)によれば、 $S_\theta(\Delta\omega)$  の値は離調周波数  $\Delta\omega$  が大きくなるに従い (この

場合は)  $\Delta\omega^2$  に反比例して小さくなる。また、 $Q_L$  が大きいほど、発振周波数  $\omega_0$

が低いほど、 $S_\theta(\Delta\omega)$  が小さくなる。

式 (6.33) をデシベル表示して次式の  $L_\theta(\Delta\omega)$  が得られる。これは、通常スペアナで観測される発振器のスペクトル特性であり、単位は  $dBc / Hz$  である。

$$L_\theta(\Delta\omega) = 10 \log(S_\theta(\Delta\omega)) = 10 \log \left( \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right)^2 \frac{1}{\Delta\omega^2} \frac{2k_B T}{P_0} \right) \quad (6.34)$$

ここで、発振回路に使用される能動素子の雑音指数  $F$  を考慮して  $k_B T \rightarrow Fk_B T$  に

置き換える、また、 $1/f$  雜音が支配的なコーナ周波数  $\omega_{C0}$  までは、 $k_B T \rightarrow \frac{a}{\Delta\omega}$  に置

き換えると位相雑音電力スペクトル  $L_\theta(\Delta\omega)$  は次式で表わすことができる。

$$L_\theta(\Delta\omega) = \begin{cases} 10 \log \left\{ \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right)^2 \frac{1}{\Delta\omega^3} \frac{2a}{P_0} \right\} & (\Delta\omega \leq \omega_{C0}) \\ 10 \log \left\{ \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right)^2 \frac{1}{\Delta\omega^2} \frac{2Fk_B T}{P_0} \right\} & (\omega_{C0} \leq \Delta\omega \leq B = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}Q_L}) \\ 10 \log \left\{ \frac{Fk_B T}{P_0} \right\} & (B = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}Q_L} \leq \Delta\omega) \end{cases} \quad (6.35)$$

図 6.11 にこの場合の位相雑音電力スペクトル  $L_\theta(\Delta\omega)$  を示す。なお、 $L_\theta(\Delta\omega)$

は  $\Delta\omega$  に対して偶関数となっており、式および図は  $\Delta\omega > 0$  の部分を示している。

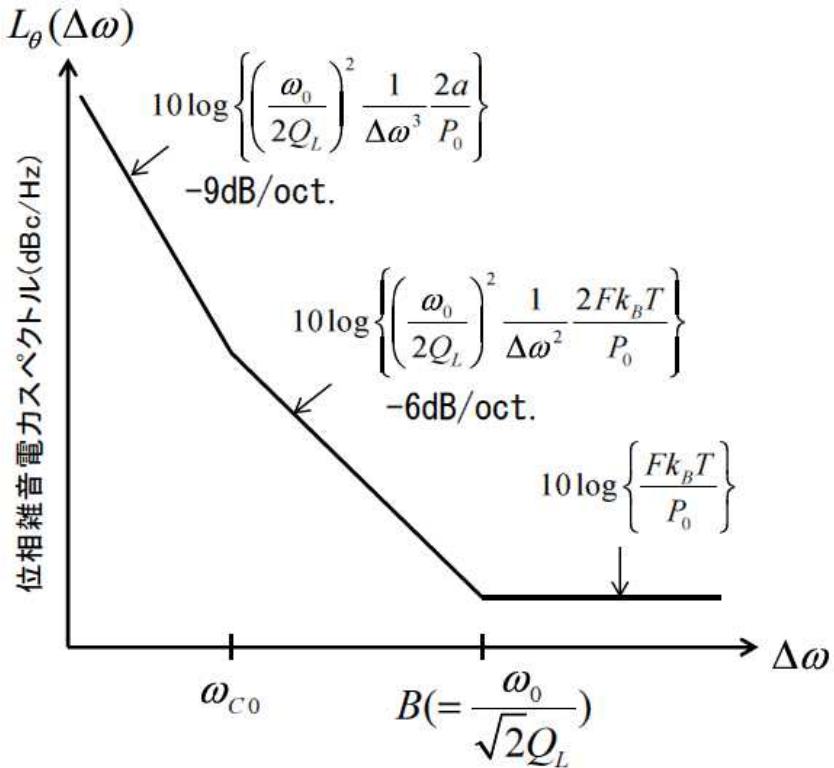


図 6.11 能動素子の雑音指数  $F$ 、 $1/f$  雜音を考慮した  
位相雑音電力スペクトル  $L_\theta(\Delta\omega)$

$S_\theta(\Delta\omega)$  を  $|\Delta\omega| \leq B = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}Q_L}$  の範囲で積分することにより、位相雑音電力  $P_{n,\theta}$  対

発振信号電力  $P_0$  の比  $\frac{1}{CNR_\theta} = \frac{P_{n,\theta}}{P_0}$  が求まるはずである。しかし、ここで注意すべ

きは、 $\Delta\omega \rightarrow 0$  の時、 $S_\theta(\Delta\omega) \rightarrow \infty$  となり、 $S_\theta(\Delta\omega)$  は定義されない。このため

$CNR_\theta$  を求める際には、現実に即して（少なくとも位相雑音電力が発振信号電力

以上になることは無い）、図 6.12 のように  $|\Delta\omega| < \omega_1$  で  $S_\theta(\Delta\omega) = S_\theta(\omega_1) (\leq 1)$  と仮定して計算を行う。

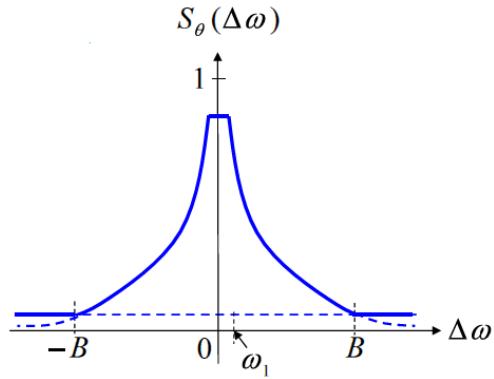


図 6.12  $CNR_\theta$  を求める際の  $S_\theta(\Delta\omega)$  の様子を示す模式図

$S_\theta(\Delta\omega)$  として式(6.33)を用いると、 $CNR_\theta$  は次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{CNR_\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B S_\theta(\Delta\omega) d\Delta\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\omega_0}{2Q_L} \right)^2 \frac{2k_B T}{P_0} \left( 2 \int_0^{\omega_1} \frac{1}{\omega_1^2} d\Delta\omega + 2 \int_{\omega_1}^B \frac{1}{\Delta\omega^2} d\Delta\omega \right) \\
 &\approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{\omega_0}{Q_L} \right)^2 \frac{k_B T}{P_0} \frac{1}{\omega_1}
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

一方、 $CNR_\theta$  は、次式のように表わすことができる。

$$\frac{1}{CNR_\theta} = \frac{P_{n,\theta}}{P_0} = \frac{\sigma_{n,\theta}^2}{A_0^2 / 2} \tag{6.37}$$

ここで、 $\sigma_{n,\theta}$  は位相雑音による雑音電圧の rms 値である。

位相ゆらぎの rms 値  $\theta_{n,rms} = \sqrt{\langle |\theta_n|^2 \rangle}$  と位相雑音電圧  $\sigma_{n,\theta}$  と信号電圧振幅  $A_0$  は

図 6.13 に示す関係にある（付録 H 参照）。式(6.36) および(6.37) から、 $\theta_{n,rms}$  は

次式で与えられる。

$$\theta_{n,rms} = \sqrt{\langle |\theta_n|^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{n,\theta}}{A_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{CNR_\theta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi} \left( \frac{\omega_0}{Q_L} \right)^2 \frac{k_B T}{P_0} \frac{1}{\omega_1}} \quad (6.38)$$

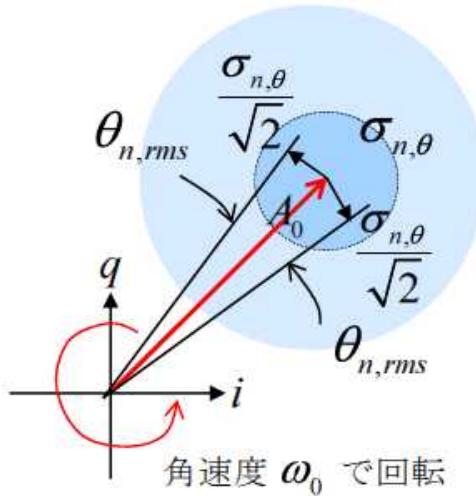


図 6.13 位相ゆらぎの rms 値  $\theta_{n,rms} = \sqrt{\langle \theta_n(t)^2 \rangle}$  と

位相雑音電圧  $\sigma_{n,\theta}$  と信号電圧振幅  $A_0$  の関係

### 6.3.3 位相雑音による受信機の CNR

位相雑音によりローカル発振器の発振信号（以後、単にローカル信号と呼ぶ）のスペクトルが広がる。これにより、以下の問題が生じる。

- ① ミキシング出力の所望帯域内に隣チャネルからの信号成分が入ることによる干渉
- ② 自チャネルの信号成分が広がることによる雑音増加（CNR劣化）

図 6.14 にダウンミキシングの場合についてその様子を模式的に示す。上記①の問題は受信環境によるものとなる。これに対し、②は受信時のCNRの劣化としてあらわれ、以下で定量的な議論を行う。

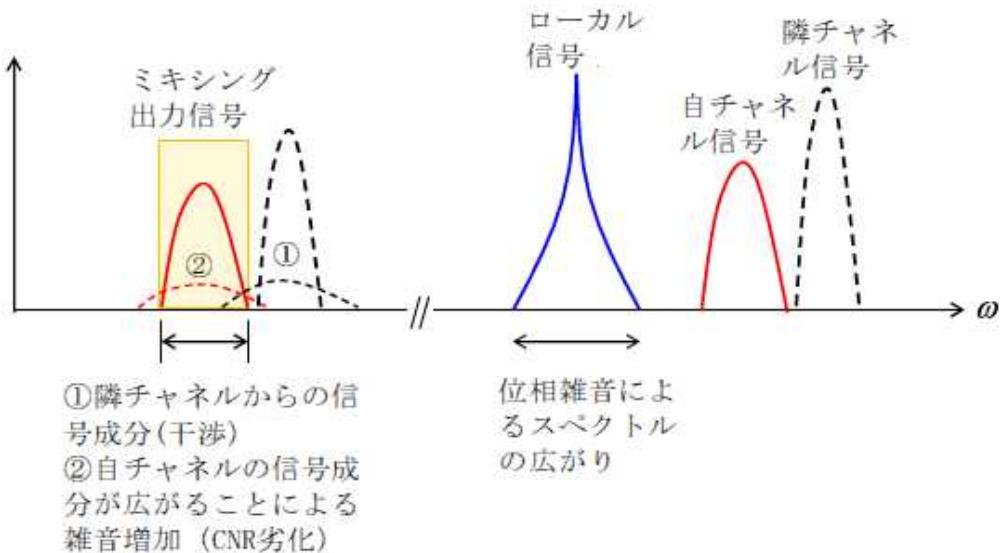


図 6.14 位相雑音により生じる問題

図 6.15 に、ミクサ部の構成モデルと各端子の信号電圧および雑音電圧の関係を示す。受信信号電圧を  $v_{rf}(t)$  ( $= A_{rf} \cos(\omega_{rf}t)$ )、ローカル信号電圧を  $v_p(t)$  ( $= A_0 \cos(\omega_0 t)$ )、ミクサ出力信号電圧を  $v_{mix}(t)$  ( $= A_{mix} \cos(\omega_{mix}t)$ ) とする。ここで、受信信号に雑音電圧  $v_n$  (rms 値  $\sigma_n = \sqrt{\langle |v_n|^2 \rangle}$ ) が存在し、かつ、ローカル信号に雑音電圧  $v_{n,\theta}$  (rms 値  $\sigma_{n,\theta} = \sqrt{\langle |v_{n,\theta}|^2 \rangle}$ ) が存在するとする。また、ミクサ出力の雑音電圧を  $v_{n,mix}$  (rms 値  $\sigma_{n,mix} = \sqrt{\langle |v_{n,mix}|^2 \rangle}$ ) とする。

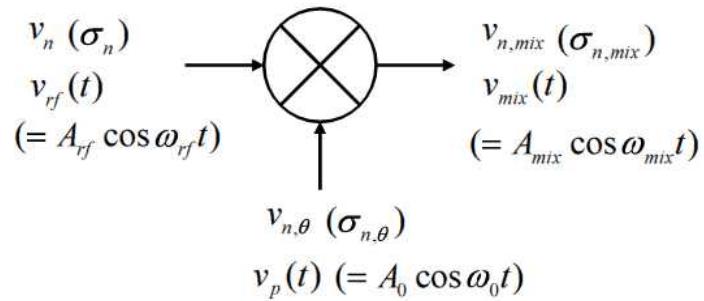


図 6.15 ミクサの各端子の信号および雑音電圧の関係

ミクサの受信信号端子とローカル信号端子は理想的には対等（入れ替え可能）の動作をすると考えると、ミクサ出力端子にあらわれる信号電圧  $v_{mix}(t)$  および雑音（電圧）  $v_{n,mix}$  (rms 値  $\sigma_{n,mix} = \sqrt{\langle |v_{n,mix}|^2 \rangle}$  ) は、近似的に、それぞれ以下のように表わせる。

$$v_{mix}(t) = Mv_{rf}(t)v_p(t) \quad \rightarrow \quad \frac{|A_{mix}|^2}{2} = M^2 \frac{|A_{rf}|^2}{2} \frac{|A_0|^2}{2} \quad (6.39)$$

$$v_{n,mix} = \sqrt{F} M v_p(t) v_n + \sqrt{F} M v_{rf}(t) v_{n,\theta} \quad (6.40)$$

ここで、 $M$  はミクサの変換利得を表わす係数であり、 $F$  はミクサの雑音指数である。

雑音  $v_n$ 、 $v_{n,\theta}$  は無相関と考えることができるので、 $\langle |v_{n,mix}|^2 \rangle = \sigma_{n,mix}^2$  は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \langle |v_{n,mix}|^2 \rangle &= \sigma_{n,mix}^2 = \left\langle \left| \sqrt{F} M v_p(t) v_n + \sqrt{F} M v_{rf}(t) v_{n,\theta} \right|^2 \right\rangle \\ &= FM^2 \left( \frac{A_0^2}{2} \langle |v_n|^2 \rangle + \frac{A_{rf}^2}{2} \langle |v_{n,\theta}|^2 \rangle \right) \\ &= FM^2 \left( \frac{A_0^2}{2} \sigma_n^2 + \frac{A_{rf}^2}{2} \sigma_{n,\theta}^2 \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

図 6.16 に受信信号およびローカル信号に雑音が存在する場合のミクサ出力信号振幅と雑音の様子を示す。

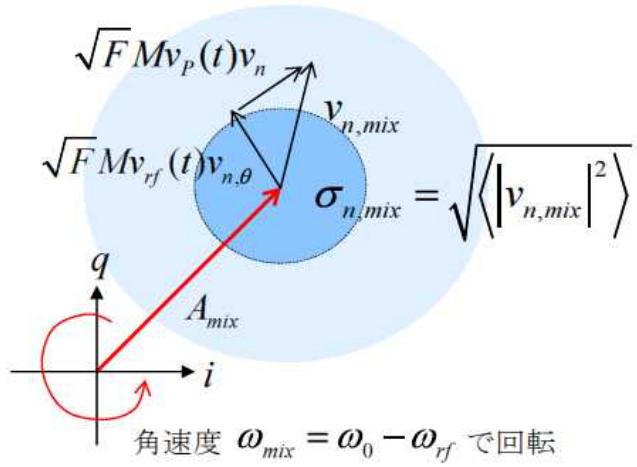


図 6.16 受信信号およびローカル信号に雑音が存在する場合の信号と雑音の様子

式(6.39), (6.41)から, ミクサ出力端での  $CNR_{mix}$  は次式で表わせる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{CNR_{mix}} &= \frac{\sigma_{n,mix}^2}{A_{mix}^2 / 2} = \frac{FM^2 \left( \frac{A_0^2}{2} \sigma_n^2 + \frac{A_{rf}^2}{2} \sigma_{n,\theta}^2 \right)}{M^2 \frac{A_{rf}^2}{2} \frac{A_0^2}{2}} \\
 &= F \left( \frac{\sigma_n^2}{A_{rf}^2 / 2} + \frac{\sigma_{n,\theta}^2}{A_0^2 / 2} \right) = F \left( \frac{1}{CNR_n} + \frac{1}{CNR_\theta} \right) = F \frac{1}{CNR_{total}}
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

ここで,

$$\frac{1}{CNR_{total}} = \frac{1}{CNR_n} + \frac{1}{CNR_\theta} \tag{6.43}$$

$CNR_n$  は受信信号の  $CNR$ ,  $CNR_\theta$  はローカル信号の  $CNR$  であり,  $CNR_{total}$  は受信信号およびローカル信号に雑音が存在する場合の総合の  $CNR$  を表わすものである。ローカル信号に雑音が存在する場合は, 式 (6.43) に従い合成  $CNR_{total}$  を求め, その後は, 通常のミクサ動作の計算をすれば良い。

### 6.3.4 数値検討

例えば位相雑音電力スペクトル特性が図 6.17 のように与えられる場合について、 $\theta_{n,rms}$ 、 $CNR_\theta$ 、 $CNR_{total}$  を計算する。なお、これまでの議論との関係から、まず角周波数  $\omega$  を用いて式導出を行い、次に周波数  $f (= \omega / 2\pi)$  を用いた式に変換して計算を行う。

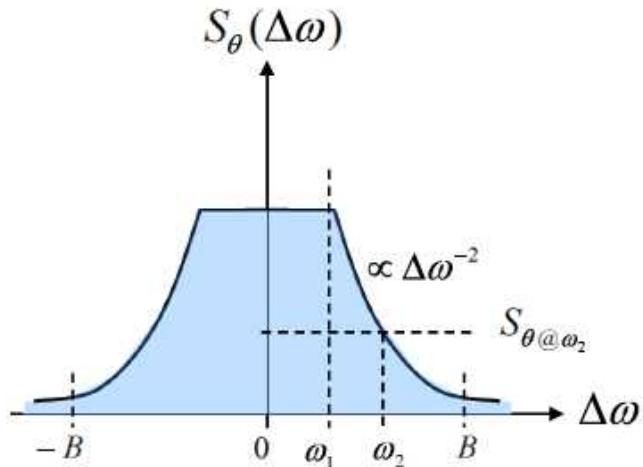


図 6.17 検討する位相雑音電力スペクトル密度  $S_\theta(\Delta\omega)$  の様子

ここでは、以下の条件のもとで検討を行う。

- (1) 離調周波数  $\Delta\omega$  が  $\omega_1 \sim B$  の範囲で  $S_\theta(\Delta\omega)$  特性は式 (6.33) に従う、すなわち、 $S_\theta(\Delta\omega)$  は  $\Delta\omega^2$  に反比例して減少する特性となる。
- (2) 離調周波数  $\Delta\omega$  が  $0 \sim \omega_1$  の範囲では  $S_\theta(\Delta\omega) = S_\theta(\omega_1)$  の一定値であるとの近似ができるとする (PLL による位相雑音補償がされるとする)。
- (3) 離調周波数  $\Delta\omega = \omega_2$  における  $S_\theta(\Delta\omega = \omega_2)$  が  $S_{\theta @ \omega_2}$  としてあらかじめ与えられるとする。

上記 (1), (2), (3) を考慮して,  $CNR_\theta$  は角周波数  $\omega$  の関数として次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{CNR_\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B S_\theta(\Delta\omega) d\Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^B S_\theta(\Delta\omega) d\Delta\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \left( S_{\theta @ \omega_2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \int_0^{\omega_1} d\Delta\omega + S_{\theta @ \omega_2} \omega_2^2 \int_{\omega_1}^B \frac{1}{\Delta\omega^2} d\Delta\omega \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( S_{\theta @ \omega_2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1} + S_{\theta @ \omega_2} \omega_2^2 \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{B} \right) \right) \\
&\approx \frac{2}{\pi} S_{\theta @ \omega_2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1}
\end{aligned} \tag{6. 44}$$

$\theta_{n,rms}$  は式 (6. 38) から次式で与えられる。

$$\theta_{n,rms} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{CNR_\theta}} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi} S_{\theta @ \omega_2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6. 45}$$

ここで角周波数  $\omega$  でなく, 周波数  $f (= \omega / 2\pi)$  を用いると,  $CNR_\theta$ ,  $\theta_{rms}$  は次式であらわせる。

$$\frac{1}{CNR_\theta} \approx 4 S_{\theta @ f_2} \frac{f_2^2}{f_1} = 4 \cdot 10^{\frac{L_{\theta @ f_2}}{10}} \frac{f_2^2}{f_1} \tag{6. 46}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{n,rms} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{CNR_\theta}} = \left( S_{\theta @ f_2} \frac{f_2^2}{f_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( 10^{\frac{L_{\theta @ f_2}}{10}} \frac{f_2^2}{f_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (rad) \\
&= \left( 10^{\frac{L_{\theta @ f_2}}{10}} \frac{f_2^2}{f_1} \right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{180}{\pi} \quad (deg)
\end{aligned} \tag{6. 47}$$

表 6.1 に  $L_{\theta@1MHz}$  の値をパラメータとして計算した  $\theta_{n,rms}$ ,  $CNR_{\theta}$ ,  $CNR_{total}$  を示す。

ここで,  $f_2 = 1MHz$  とし, そこでの位相雑音  $L_{\theta@1MHz}$  の値を変化パラメータとし,

$f_1$  は  $10KHz$  および  $100KHz$  の 2 つの場合について計算した。  $CNR_{total}$  の計算において  $CNR_n = 12dB$  とした。

表 6.1  $L_{\theta@1MHz}$  の値をパラメータとして計算した  $\theta_{n,rms}$ ,  $CNR_{\theta}$ ,  $CNR_{total}$

$L_{\theta@1MHz}$ ( $dBc / Hz$ )	$f_1 = 10KHz$			$f_1 = 100KHz$		
	$\theta_{rms}$ (deg)	$CNR_{\theta}$ (dB)	$CNR_{total}$ (dB)	$\theta_{rms}$ (deg)	$CNR_{\theta}$ (dB)	$CNR_{total}$ (dB)
-85	32.2	-1.0	-1.2	10.2	9.0	7.2
-90	18.0	4.0	3.4	5.7	14.0	9.9
-95	10.2	9.0	7.2	3.2	19.0	11.2
-100	5.7	14.0	9.9	1.9	24.0	11.7
-105	3.2	19.0	11.2	1.0	29.0	11.9
-110	1.9	24.0	11.7	0.6	34.0	12.0

\*1  $f_2 = 1MHz$       \*2 条件  $CNR_n = 12dB$  として計算

## 付録 F 共振と Q 値

コイル  $L$  とコンデンサ  $C$  から成る閉回路では、 $L$  と  $C$  で決まる共振周波数で共振が生じ、回路に損失が無く、かつ、電流による電磁放射がなければ、共振は永久に続く。なぜ、このような共振現象が生じるのであろうか。以下では、前半で電磁気の基本原理から(1)共振のメカニズムを考察し、後半で(2)共振回路の  $Q$  値について述べる。

### (1) 共振のメカニズム

図 F. 1 に示すようなコイル  $L$  とコンデンサ  $C$  とでなる閉回路（共振回路）を考える。

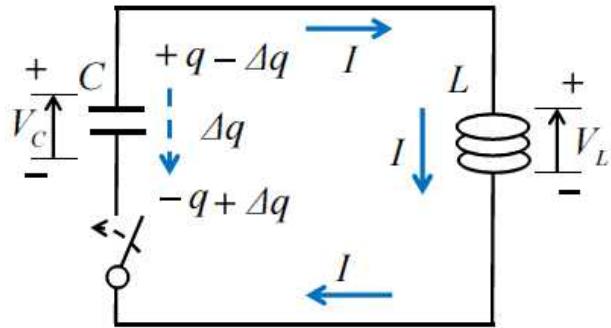


図 F. 1 コイル  $L$  とコンデンサ  $C$  とでなる閉回路（共振回路）

ここで、コンデンサにはあらかじめ  $q_0$  の電荷がチャージされているとする。スイッチを閉じると、回路に電流  $I$  が流れ出す。コンデンサには、微小時間  $\Delta t$  に微小電荷  $\Delta q$  が移動することによって以下のように電流が流れる。

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{dq}{dt} \quad (\text{F. 1})$$

コンデンサ  $C$  にかかる電圧  $V_C$  は、

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (\text{F. 2})$$

コイル  $L$  には、変化する電流により次式で与えられる逆起電圧  $V_L$  が生じる。

$$V_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (\text{F. 3})$$

この時、次式が成り立つ。

$$V_C(t) - V_L(t) = 0 \quad (\text{F. 4})$$

式 (F. 1) ~ (F. 4) から、電荷  $q$  に関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad (\text{F. 5})$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (\text{F. 6})$$

ここで、 $\omega_0$  は共振（角）周波数を与える。

式 (F. 6) の一般解は、次式の形で与えることができる。

$$q(t) = C_1 \cos(\omega_0 t + C_2) \quad (\text{F. 7})$$

これから、電流  $I(t)$  は、

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t + C_2) \quad (\text{F. 8})$$

$t = 0$  の時,  $q(0) = q_0$ ,  $I(0) = 0$  の境界条件から,

$$C_1 = q_0 \quad C_2 = 0 \quad (\text{F. 9})$$

これから,

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t) \quad (\text{F. 10})$$

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t) \quad (\text{F. 11})$$

コンデンサに蓄えられる静電エネルギー  $U_e(t)$  は

$$U_e(t) = \frac{1}{2} C V_c(t)^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{q(t)}{C} \right)^2 = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t) \quad (\text{F. 12})$$

コイルに蓄えられる誘導エネルギー  $U_m(t)$  は

$$U_m(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t) \quad (\text{F. 13})$$

全エネルギー  $U_T(t)$  は

$$U_T(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{q_0^2}{2C} = U_0 \quad (\text{一定}) \quad (\text{F. 14})$$

図 A. 2 に  $U_e(t)$ ,  $U_m(t)$ ,  $U_T(t)$  の関係を示す。  $U_e(t)$  と  $U_m(t)$  は時間とともに変動するのに対して,  $U_T(t)$  は時間によらず一定となる。

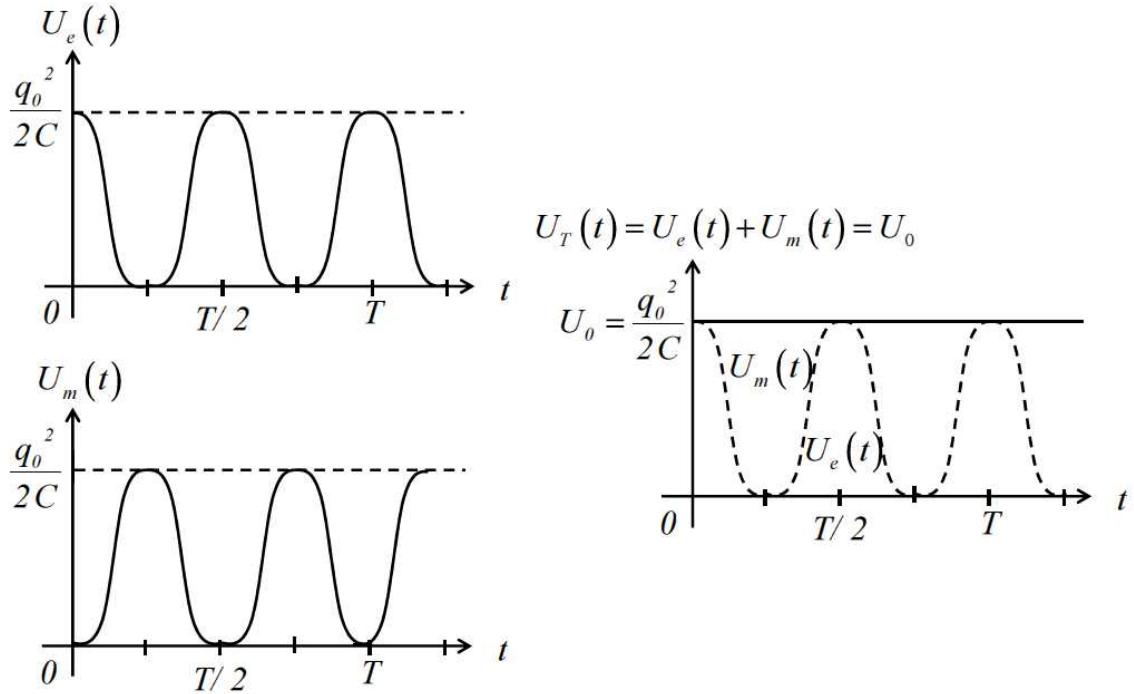


図 F.2  $U_e(t)$ ,  $U_m(t)$ ,  $U_T(t)$  の関係

以上のことから, コイル  $L$  とコンデンサ  $C$  とでなる共振回路では,  $L$  と  $C$  とで決まる共振 (角) 周波数  $\omega_0$  に対応して, エネルギーが, コンデンサに蓄えられる静電エネルギー  $U_e(t)$  とコイルに蓄えられる誘導エネルギー  $U_m(t)$  とに周期的に姿を変化させられる。この時, 共振回路内の全エネルギー  $U_T(t) = U_0$  は一定に保持される。

## (2) 共振回路の Q 値

図 F. 3 に抵抗  $R$  を含む  $LC$  共振回路を示す。

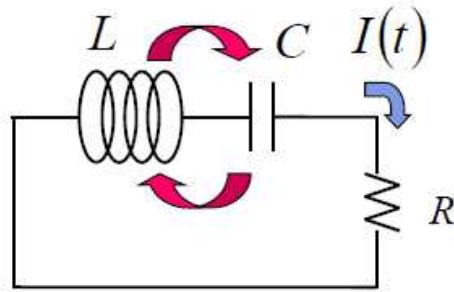


図 F.3 抵抗  $R$  を含む  $LC$  共振回路

共振により、 $L$  と  $C$  間をエネルギーが行き来する間に、一部のエネルギーが抵抗  $R$  で消費される。 $Q$  値は、共振回路に保持されるエネルギー  $U_0$  と抵抗  $R$  で消費される電力（1秒間に消費されるエネルギー） $P_R$  との比をとり、それに共振角周波数  $\omega_0$  を掛けたものとして定義される。

定義から、 $Q$  値に関する次式の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\omega_0 U_0}{P_R} = \frac{\omega_0 U_0}{\frac{1}{T} \int_0^T R I(t)^2 dt} = \frac{\omega_0 \frac{q_0^2}{2C}}{\frac{1}{2} \omega_0^2 q_0^2 R} \\
 &= \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\omega_0 L}{R}
 \end{aligned} \tag{F. 15}$$

ここで、電流  $I(t)$  に関する式 (F. 11)、共振回路中に保持されるエネルギー  $U_0$  に関する式 (F. 14) を用いている。  
 抵抗  $R$  として、図 F. 4 に示すように、 $LC$  共振回路内部に損失として含まれる抵抗  $R_P$  と負荷として与えられる抵抗  $R_L$  がある。これらのいずれの抵抗を用いるかにより、共振回路の  $Q$  値には次式で定義される無負荷  $Q$  ( $Q_U$ )、外部  $Q$

$(Q_{ex})$ , 負荷  $Q$  ( $Q_L$ ) の 3 つがある。それぞれ次式で与えられる。

$$Q_U = \frac{\omega_0 L}{R_P} \quad (\text{F. 16})$$

$$Q_{ex} = \frac{\omega_0 L}{R_L} \quad (\text{F. 17})$$

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_P + R_L} \quad (\text{F. 18})$$

また、これから、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_U} + \frac{1}{Q_{ex}} \quad (\text{F. 19})$$

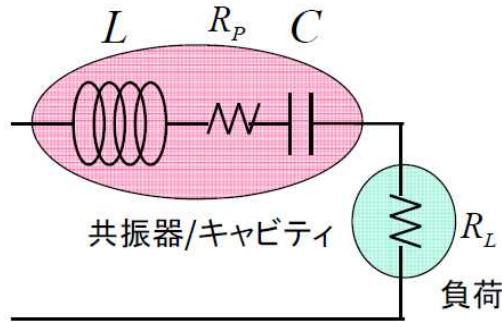


図 F. 4  $Q_U$ ,  $Q_{ex}$ ,  $Q_L$  を説明する図

以下ではさらに、 $Q$  値に関する別の表現式を示す。まず、図 F. 5 に示すように、抵抗  $R$  を含む  $LC$  共振回路のインピーダンス  $Z$  を求める。

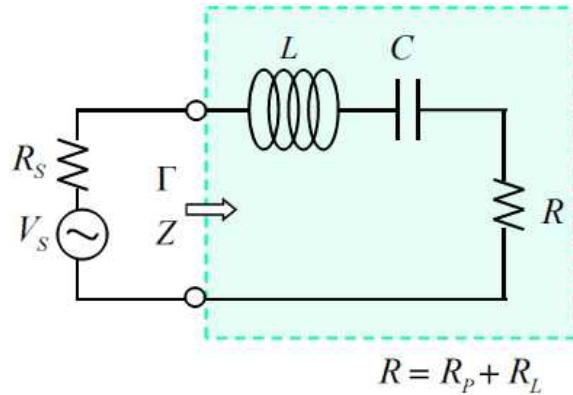


図 F.5 抵抗  $R$  を含む  $LC$  共振回路のインピーダンス  $Z$

$Z$  は (角) 周波数  $\omega$  の関数として次式で表せる。

$$Z(\omega) = R + jX = R + j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \quad (\text{F. 20})$$

この時、共振周波数  $\omega_0$  において、

$$Z(\omega_0) = R + j \frac{\omega_0^2 LC - 1}{\omega_0 C} = R \quad (\text{F. 21})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial X(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} &= \frac{\omega_0^2 LC + 1}{\omega_0^2 C} = \frac{2}{\omega_0^2 C} = 2L \\ \rightarrow L &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial X(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \quad (\text{F. 22})$$

式 (F. 15), (F. 21), (F. 22) から、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{\frac{\partial X(\omega)}{\partial \omega}}{Z(\omega_0)} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (\text{F. 23})$$

式 (F. 23) は,  $LC$  共振回路以外の一般のマイクロ波回路にも適用でき, マイクロ波回路の  $Q$  値を与える実際的な評価式といえる。

次に,  $Q$  値に関するさらに別の表現式として, 回路の伝送 (周波数) 特性から近似的に  $Q$  値を求める方法について述べる。図 F. 5 の共振回路系において, 共振回路の内部抵抗  $R_p$  は十分小さく無視でき, また, 抵抗  $R$  は負荷抵抗  $R_L$  であるとする。この時, 2.2 節の議論から負荷で消費される電力  $P_L$  は,  $P_{av}$ ,  $P_{ref}$ ,  $\Gamma$  を用いて次式で与えられる。

$$P_L = P_{av} - P_{ref} = P_{av} (1 - |\Gamma|^2) \quad (\text{F. 24})$$

ここで,

$$P_{av} = \frac{|V_S|^2}{4R_S} \quad (\text{F. 25})$$

$$\begin{aligned} 1 - |\Gamma|^2 &= \frac{4\omega^2 C^2 R R_S}{\omega^2 C^2 (R + R_S)^2 + (1 - \omega^2 L C)^2} \\ &= \frac{4 \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{R_S}{R}}{\frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{R_S}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{F. 26})$$

ここで,  $Q$  値として, 式(F. 15)を用いている。

式(F. 24)～(F. 26)から  $P_L$  は(角)周波数  $\omega$  の関数となっている。ここで,  $\omega = \omega_0$  の時の  $P_L(\omega_0)$  と  $\omega = \omega_1$  の時の  $P_L(\omega_1)$  との比は以下で表せる。

$$\begin{aligned}
\frac{P_L(\omega_0)}{P_L(\omega_1)} &= \frac{1 - |\Gamma(\omega_0)|^2}{1 - |\Gamma(\omega_1)|^2} \\
&= \frac{4 \frac{R_S}{R}}{\left(1 + \frac{R_S}{R}\right)^2} \sqrt{\frac{4 \frac{1}{Q^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \frac{R_S}{R}}{\frac{1}{Q^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{R_S}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)^2}} \\
&= 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 \frac{Q^2}{\left(1 + \frac{R_S}{R}\right)^2}
\end{aligned} \tag{F. 27}$$

式 (F. 27) から,

$$Q = \frac{\left(1 + \frac{R_S}{R}\right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)} \sqrt{\frac{P_L(\omega_0)}{P_L(\omega_1)} - 1} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(1 + \frac{R_S}{R}\right) \sqrt{\frac{P_L(\omega_0)}{P_L(\omega_1)} - 1} \tag{F. 28}$$

ここで,

$$\Delta\omega = 2|\omega_1 - \omega_0| \tag{F. 29}$$

図 F. 6 に示す 3dB 帯域幅  $\Delta\omega_{3dB}$  を使うと, 式 (F. 28) は次式となる。

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{3dB}} \left(1 + \frac{R_S}{R}\right) \tag{F. 30}$$

$R_S = R = R_L (\neq 0)$  (インピーダンス整合) の場合,

$$Q \approx 2 \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{3dB}} \quad (\text{F. 31})$$

この方法は、共振回路の内部抵抗  $R_P$  が十分小さく無視できる場合に、伝送特性から共振回路の概略の  $Q$  値 ( $Q_L$ ) を知る方法として使われるものである。

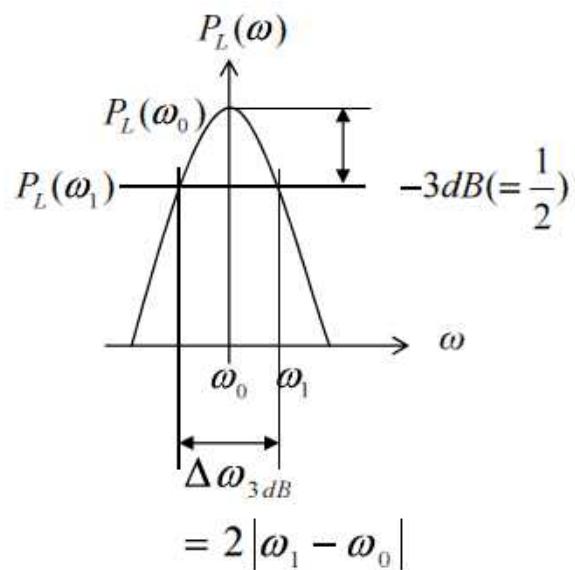


図 F. 6 3dB 帯域幅  $\Delta\omega_{3dB}$  と  $Q$

付録 G  $\left. \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0}$ ,  $\left. \frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0}$  の導出

負抵抗発振回路は図 G. 1 に示すように、伝達関数（の周波数応答） $H(\omega)$ を用いた発振回路の形にできる。このことから、負抵抗発振回路における検討を行い、そこで得られた結果を $H(\omega)$ に適用する手順をとることとする。

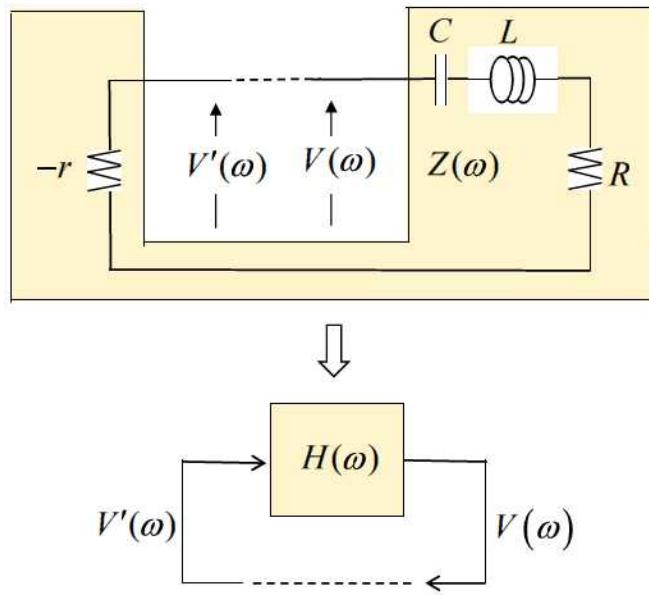


図 G. 1 負抵抗発振回路と伝達関数  $H(\omega)$

図において、出力（負荷）側回路 $Z(\omega)$ を流れる電流と負抵抗 $-r$ を流れる電流が等しいことから、次式が得られる。

$$\frac{V(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{V'(\omega)}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{V(\omega)}{V'(\omega)} = \frac{Z(\omega)}{r} \quad (G. 1)$$

一方、伝達関数（の周波数応答） $H(\omega)$ は次式で与えられる。

$$\frac{V(\omega)}{V'(\omega)} = H(\omega) \quad (G. 2)$$

式(G. 1), (G. 2)から、次式が得られる。

$$\frac{V(\omega)}{V'(\omega)} = H(\omega) = \frac{Z(\omega)}{r} \quad (\text{G. 3})$$

このことからまず、 $\frac{Z(\omega)}{r}$  の振る舞いを考える。 $\frac{Z(\omega)}{r}$  は次式で表わせる。

$$\frac{Z(\omega)}{r} = \frac{1}{r} \left( R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \quad (\text{G. 4})$$

これはさらに、発振周波数（共振周波数） $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 、負荷  $Q_L$   $Q_L = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$  を用いて、以下のように式変形できる。

$$\frac{Z(\omega)}{r} = \frac{R}{r} \left( 1 + j Q_L \left( \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} \right) \right) \approx \frac{R}{r} \left( 1 + j \frac{2 Q_L}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right) \quad (\text{G. 5})$$

ここで、 $\frac{Z(\omega)}{r}$  を以下のように表わす。

$$\frac{Z(\omega)}{r} = \left| \frac{Z(\omega)}{r} \right| e^{j \theta_Z(\omega)} \quad (\text{G. 6})$$

この時、 $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|$ 、 $\theta_Z(\omega)$  は次式で与えられる。

$$\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right| = \frac{R}{r} \sqrt{1 + \left( \frac{2 Q_L}{\omega_0} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2} \quad (\text{G. 7})$$

$$\theta_Z(\omega) \approx \tan(\theta_Z(\omega)) = \frac{2 Q_L}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (\text{G. 8})$$

図 G. 2 に  $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|$ 、 $\angle \frac{Z(\omega)}{r} = \theta_Z(\omega)$  の関係を示す。

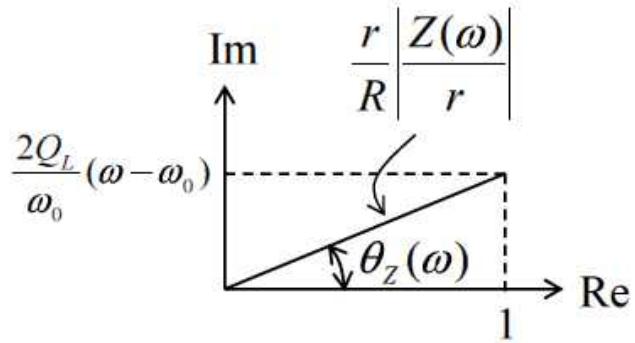


図 G. 2  $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|, \theta_z(\omega)$

$\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|, \angle \frac{Z(\omega)}{r} = \theta_z(\omega)$  は周波数  $\omega_0$  で発振条件を満たし, それ以下となる。

$$\left| \frac{Z(\omega_0)}{r} \right| = \frac{R}{r} = 1 \quad (G. 9)$$

$$\angle \frac{Z(\omega_0)}{r} = \theta_z(\omega_0) = 0 \quad (G. 10)$$

上式は,  $H(\omega)$  に対する定常発振条件式 (式 (6.21)) に対応している。すなわち,  $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)}$  と表わした時に次式となることに対応している。

$$|H(\omega_0)| = 1 \quad (G. 11)$$

$$\angle H(\omega_0) = \theta_H(\omega_0) = 0 \quad (G. 12)$$

次に,  $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|, \angle \frac{Z(\omega)}{r} = \theta_z(\omega)$  の周波数  $\omega_0$  における微分は次式で与えられる。

$$\left. \frac{\partial |Z(\omega)/r|}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{R}{r} \frac{\left( \frac{2Q_L}{\omega_0} \right)^2 2(\omega - \omega_0)}{\sqrt{1 + \left( \frac{2Q_L}{\omega_0} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2}} \Bigg|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (\text{G. 13})$$

$$\left. \frac{\partial \theta_z(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2Q_L}{\omega_0} \quad (\text{G. 14})$$

図 G. 3 は  $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|$ ,  $\angle \frac{Z(\omega)}{r} = \theta_z(\omega)$  とその微分の様子を示す。

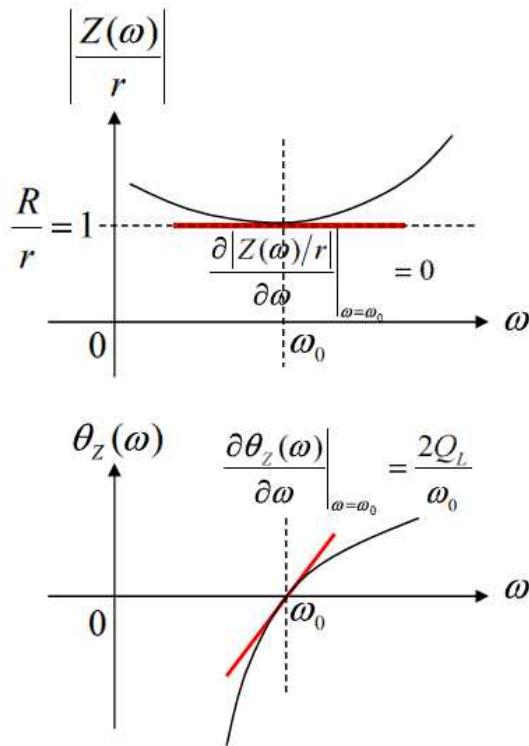


図 G. 3  $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right|$ ,  $\angle \frac{Z(\omega)}{r} = \theta_z(\omega)$  とその微分

$\frac{Z(\omega)}{r}$  が  $H(\omega)$  に対応することから,  $\frac{Z(\omega)}{r}$  に対する上式 (G. 13), (G. 14) を

$H(\omega)$  の式に置き換えると次式が得られる。

$$\left. \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (\text{G. 15})$$

$$\left. \frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2Q_L}{\omega_0} \quad (\text{G. 16})$$

本文の式 (6. 25), (6. 26) が得られた。

ここで,  $\left| \frac{Z(\omega)}{r} \right| \rightarrow |H(\omega)|$ ,  $\angle \frac{Z(\omega)}{r} = \theta_Z(\omega) \rightarrow \angle H(\omega) = \theta_H(\omega)$  と置き換えることにより, 図 G. 3 を  $H(\omega)$  に関する図と読み替えることができる。図 G. 4 に  $|H(\omega)|$ ,  $\angle H(\omega) = \theta_H(\omega)$  とその微分の様子を示す。

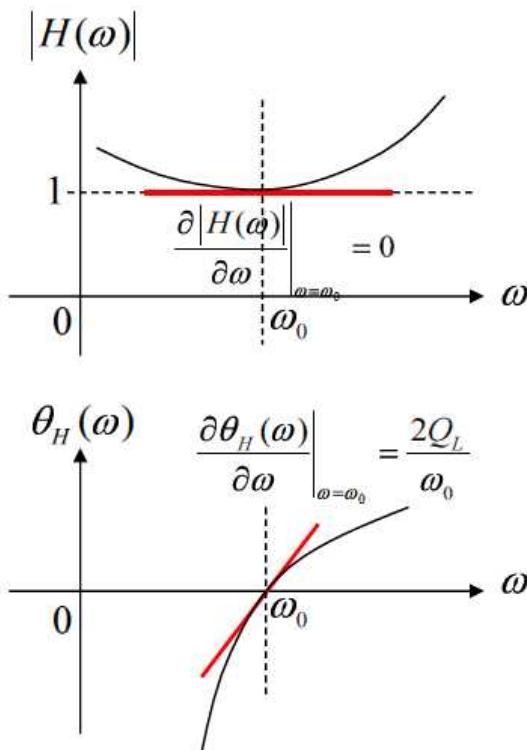


図 G. 4  $|H(\omega)|$ ,  $\angle H(\omega) = \theta_H(\omega)$  とその微分

## 付録 H $\theta_{n,rms}$ , $\sigma_{n,\theta}$ , $A_0$ の関係式の導出

図 H. 1 に雑音電圧  $v_{n,\theta}(x, y)$  と位相揺らぎ角度  $\theta_n$  の関係を示す。図は本文図 6.13 に対応したものである。ここで、雑音に対して図の様な座標軸を考える。すなわち、 $A_0$  の先端を座標原点 0 とし、 $v_{n,\theta}(x, y)$  の  $x$  成分電圧を  $x$ 、 $y$  成分電圧を  $y$  とする。

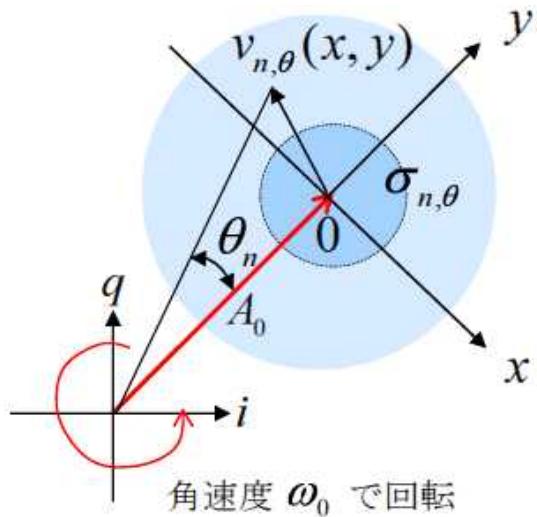


図 H. 1 雑音電圧  $v_{n,\theta}(x, y)$  と位相揺らぎ角度  $\theta_n$  の関係

雑音電圧  $v_{n,\theta}(x, y)$  の点の位相揺らぎ角度  $\theta_n$  は  $A_0 \gg |v_{n,\theta}|$  の時、以下のように近似できる。

$$|\theta_n| \approx \left| \frac{x}{A_0} \right| \quad (\text{H. 1})$$

これから、 $\langle |\theta_n|^2 \rangle$  は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
\langle |\theta_n|^2 \rangle &\approx \left\langle \left| \frac{x}{A_0} \right|^2 \right\rangle = \iint \left| \frac{x}{A_0} \right|^2 P(x, y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x}{A_0} \right|^2 P(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} P(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x}{A_0} \right|^2 P(x) dx = \frac{\langle |x|^2 \rangle}{A_0^2} = \frac{\sigma_{n,\theta}^2 / 2}{A_0^2}
\end{aligned} \tag{H. 2}$$

上式 2 行目は  $v_{n,\theta}(x, y)$  の点の確率密度関数  $P(x, y)$  が、 $x, y$  の相関が無く、かつ、それがガウス分布していることを仮定して得られる。

式(H. 2)から、 $\theta_{n,rms}$  は以下で与えられる。

$$\theta_{n,rms} = \sqrt{\langle |\theta_n|^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{n,\theta}}{A_0} \tag{H. 3}$$