

7 PLL シンセサイザ

7.1 PLL シンセサイザの構成と動作

図 7.1 に、チャージポンプ方式 PLL (Phase-Locked Loop) シンセサイザの基本回路構成を示す。

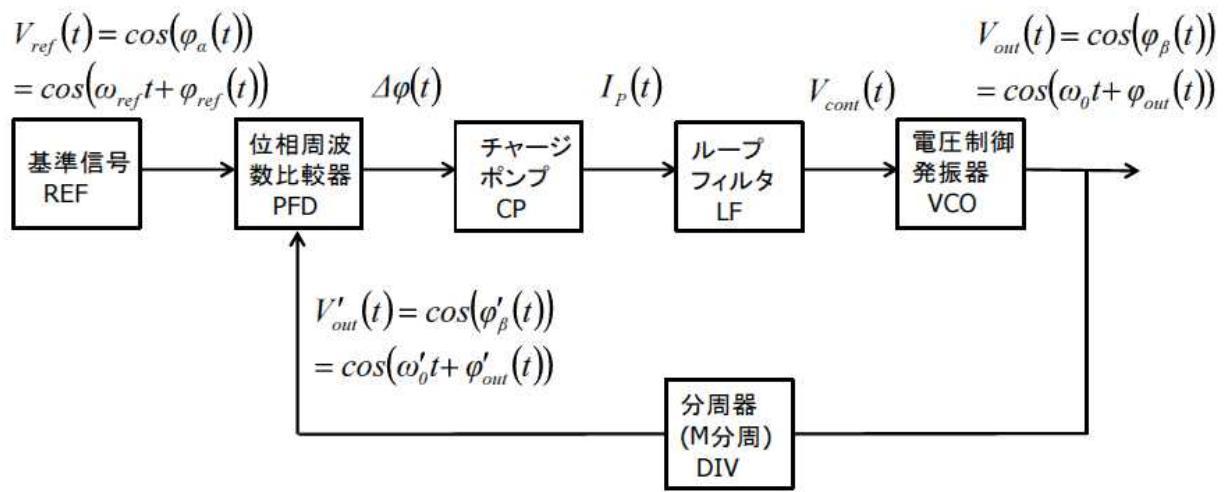


図 7.1 チャージポンプ方式 PLL シンセサイザの基本回路構成

回路は基準信号源 (REF)，位相周波数比較器 (PFD)，チャージポンプ (CP)，ループフィルタ (LF)，電圧制御発振器 (VCO)，分周器 (DIV) の回路要素からなり，位相に関する負帰還ループが形成されている。

基準信号源 (REF) からの信号 $V_{ref}(t)$ と帰還信号 $V'_{out}(t)$ とが位相周波数比較器 (PFD) で比較され， $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の位相差 $\Delta\varphi(t) = \varphi_a(t) - \varphi_\beta(t)$ が検出される。 $\Delta\varphi(t)$ はチャージポンプ (CP) にて $\Delta\varphi(t)$ の値 (正負および大きさ) に応じた電流 $I_p(t)$ に変換される。 $I_p(t)$ はループフィルタ (LF) にて低域通過フィルタリンクされるとともに電圧に変換され，電圧制御発振器 (VCO) の制御電圧 $V_{cont}(t)$ となる。 $V_{cont}(t)$ により電圧制御発振器 (VCO) の出力信号 $V_{out}(t)$ の発振周波数が変化します。

化させられる。 $V_{out}(t)$ はさらに分周器 (DIV) にて周波数/位相が $1/M$ 倍され帰還信号 $V'_{out}(t)$ となる。これにより、位相に関する負帰還ループが形成される。

定常状態からのずれにより、 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の位相 $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi'_\beta(t)$ に位相差 $\Delta\varphi(t)$ が生じると、 $\Delta\varphi(t) \rightarrow 0$ となるように動作する。 $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi'_\beta(t)$ は累積位相であり、これには周波数の情報も含まれており、位相差 $\Delta\varphi(t) \rightarrow 0$ とすることで、周波数と位相を共に等しくすることができる。

PLL が同期して定常発振している状態では、 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の周波数 ω_{ref} と ω'_0 とは等しくなり、次式が成り立っている。

$$\omega_{ref} = \omega'_0 = \omega_0 / M \quad \rightarrow \quad \omega_0 = M \omega_{ref} \quad (7.1)$$

ここで、 ω_0 は電圧制御発振器 (VCO) の定常状態での発振周波数であり、 M は分周器 (DIV) の分周比である。当面の PLL の議論では M は固定値として扱う。 M をプログラマブルに変化させることにより周波数が変化するシンセサイザが構成される。周波数に関して式 (7.1) の関係 (ω_{ref} と ω'_0 とが等しい) が成り立つ時には、位相差 $\Delta\varphi(t)$ を次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= \varphi_\alpha(t) - \varphi'_\beta(t) \\ &= (\omega_{ref} t + \varphi_{ref}(t)) - (\omega'_0 t + \varphi'_{out}(t)) = \varphi_{ref}(t) - \varphi'_{out}(t) \end{aligned} \quad (7.2)$$

$\varphi_\alpha(t)$, $\varphi'_\beta(t)$ は累積位相、 $\varphi_{ref}(t)$, $\varphi'_{out}(t)$ は瞬時位相である。PLL では位相 $\varphi'_{out}(t)$ が位相 $\varphi_{ref}(t)$ に同期するように制御を行う。

以下で、PLL シンセサイザを構成するそれぞれの回路要素の構成、動作について述べる。ただし、分周器 (DIV) については後の節で述べる

(A) 位相周波数比較器 (PFD)

図 7.2 に位相周波数比較器 (PFD) の構成例を示す。2 個のリセット端子付きエッジトリガ D フリップ・フロップ DFF1, DFF2 と AND ゲートで構成される。ここで、DFF1 の CLK 端子には $V_{ref}(t)$ が供給され、DFF2 の CLK 端子には $V'_{out}(t)$ が供給される。DFF1, DFF2 の D 端子は論理 “1” に固定されている。初期状態では、出力端子 Q1, Q2 は論理 “0” となっている。

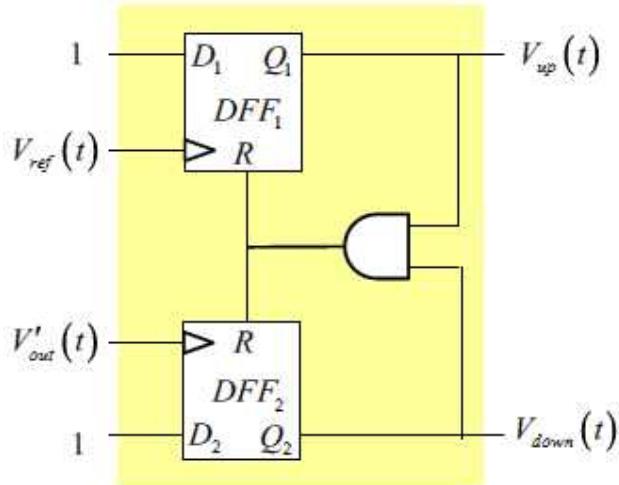
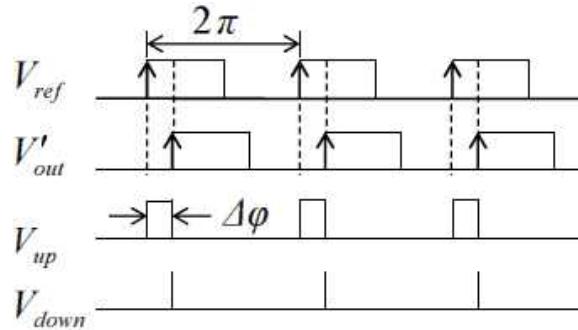


図 7.2 位相周波数比較器 (PFD) の構成例

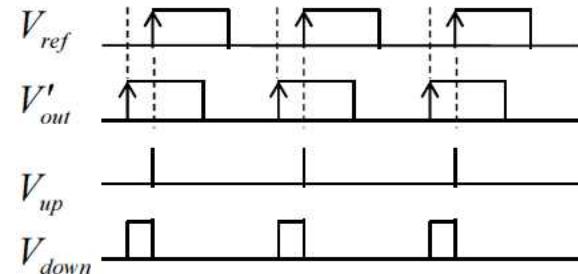
まず、 $V_{ref}(t)$ の位相が $V'_{out}(t)$ の位相に比べて進んでいる場合を考える。信号 $V_{ref}(t)$ が立ち上がる時、Q1 が “1” に遷移しその状態が保たれる。次に信号 $V'_{out}(t)$ が遅れて立ち上がる時、Q2 が “1” に遷移する。Q1, Q2 が共に “1” となった瞬間にリセット端子に接続される AND ゲート出力が “1” となり、2 つの DFF1, DFF2 が共にリセットされ Q1, Q2 は共に “0” となる。この結果、図 7.3(a) に示す様に、位相差 $\Delta\varphi(t)$ に応じた電圧パルス $V_{up}(t)$ が生じることになる。

次に、 $V_{ref}(t)$ の位相が $V'_{out}(t)$ の位相に比べて遅れている場合を考える。信号 $V'_{out}(t)$ が立ち上がる時、Q2 が “1” に遷移しその状態が保たれる。次に信号 $V_{ref}(t)$

が遅れて立ち上がる時, Q1 が “1” に遷移する。Q1, Q2 が共に “1” となった瞬間に AND ゲート出力が “1” となり, 2 つの DFF1, DFF2 が共にリセットされ Q1, Q2 は共に “0” となる。この結果, 図 7.3(b) に示す様に, 位相差 $\Delta\varphi(t)$ に応じた電圧パルス $V_{down}(t)$ が生じる。



(a) $V_{up}(t)$



(b) $V_{down}(t)$

図 7.3 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の位相差 $\Delta\varphi(t)$ に応じた電圧パルス $V_{up}(t)$, $V_{down}(t)$

以上をまとめると, $V_{ref}(t)$ の位相が $V'_{out}(t)$ の位相に比べて進んでいる時, 位相差 $\Delta\varphi(t)$ は正の値になり, 電圧 $V_{up}(t)$ としてあらわれる。一方, $V_{ref}(t)$ の位相が $V'_{out}(t)$ の位相に比べて遅れている時, 位相差 $\Delta\varphi(t)$ は負の値になり, 電圧 $V_{down}(t)$ としてあらわれる。 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の周波数と位相が同期している時には,

$\Delta\varphi(t) = 0$ となり、 $V_{up}(t)$, $V_{down}(t)$ は生じない。

(B) チャージポンプ (CP)

図 7.4 にチャージポンプ (CP) の基本回路構成を示す。チャージポンプ (CP) はループフィルタ (LF) とともに用いることにより、位相周波数比較器 (PFD) で検出された位相差 $\Delta\varphi(t)$ を電圧制御発振器 (VCO) のための制御電圧 $V_{cont}(t)$ に変換するものである。

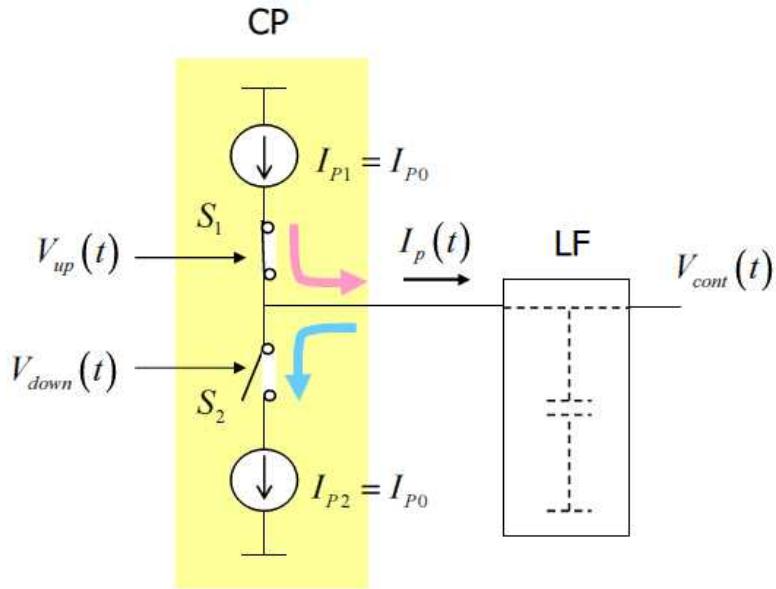


図 7.4 チャージポンプ (CP) の基本回路構成

位相周波数比較器 (PFD) で検出された位相差 $\Delta\varphi(t)$ により生じる電圧 $V_{up}(t)$, $V_{down}(t)$ に対応する 2 つのスイッチ S_1, S_2 と 2 つの電流源 I_{P1}, I_{P2} ($I_{P1} = I_{P2} = I_{P0}$) から構成され、これに続くループフィルタ (LF) に電荷を充放電する。

まず、 $V_{ref}(t)$ の位相が $V'_{out}(t)$ の位相に比べて進んでいる場合について考える。この時、位相差 $\Delta\varphi(t) (\geq 0)$ によって生じた電圧 $V_{up}(t)$ によりスイッチ S_1 が導通し、

$\Delta\varphi(t)$ に対応した時間の間、電荷がループフィルタ（LF）に流れ込む（図の赤矢印）。この電荷移動による実効電流 $I_p(t)$ は次式の伝達関数で与えられる。

$$I_p(t) = \frac{\Delta\varphi(t)}{2\pi} I_{p0} = K_p \Delta\varphi(t) \quad (7.3)$$

ここで、 $K_p = \frac{I_{p0}}{2\pi}$ （単位： $\frac{A}{rad}$ ）はチャージポンプ（CP）の利得と呼ばれる。

次に、 $V_{ref}(t)$ の位相が $V'_{out}(t)$ の位相に比べて遅れている場合について考える。

この時、位相差 $\Delta\varphi(t) (\leq 0)$ によって生じた電圧 $V_{down}(t)$ によりスイッチ S2 が導通し、 $\Delta\varphi(t)$ に対応した時間の間、LF から蓄積されていた電荷が放出される（図の青矢印）。この時の実効電流 $I_p(t)$ も上式(7.3)で与えられる。ただし、この場合、 $\Delta\varphi(t)$ は負の値をとり、その結果 $I_p(t)$ は（図の矢印の方向に対して）負の値となる。

図 7.5 に $I_p(t)$ と $\Delta\varphi(t)$ の関係を示す。 $|\Delta\varphi(t)| \leq 2\pi$ において $I_p(t)$ は $\Delta\varphi(t)$ に対して傾き K_p で原点を通る直線で表わされる。 $|\Delta\varphi(t)| \geq 2\pi$ となるところでは、図のように $0 \sim 2\pi$ 、および、 $-2\pi \sim 0$ の特性が繰り返されたものになる。

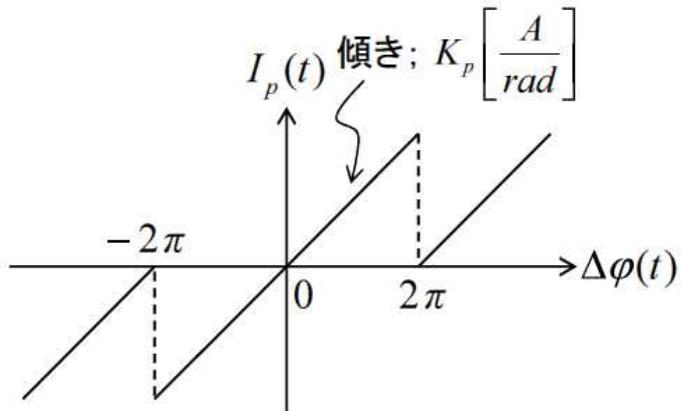


図 7.5 $I_p(t)$ と $\Delta\varphi(t)$ の関係

ここで、初めの状態において $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の周波数が異なっている場合について考える。この時は、しばしの間 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の位相差 $\Delta\phi(t)$ は同一符号のまま推移する。すると、ループフィルタ (LF) 内のコンデンサに電荷が蓄積され続ける。電圧制御発振器 (VCO) の発振周波数が変化し、 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の周波数が等しくなるまでこの（電荷蓄積）動作は続けられる。 $V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の周波数 ω_{ref} と ω'_0 が等しい定常状態になると PLL は位相差 $\Delta\phi(t) \rightarrow 0$ となるように負帰還動作することになる。ここで注意することは、定常状態では位相差 $\Delta\phi(t)$ が 0 と成るように動作し、その結果ループフィルタ (LF) 内のコンデンサへの電荷の出入りは 0 となっているが、それ以前に蓄積された電荷は残っており、それによりループフィルタ (LF) からは一定電圧（例えば V_0 ）が出力され続けている。このことから、 $V_{cont}(t)$ は以下のように表わすことができよう。

$$V_{cont}(t) = V_0 + \Delta V_{cont}(t) \quad (7.4)$$

定常状態 ($V_{ref}(t)$ と $V'_{out}(t)$ の周波数が等しく式 (7.1) が成立している) では、位相差 $\Delta\phi(t)$ による $V_{cont}(t)$ の変動は $\Delta V_{cont}(t)$ にあらわれるといえる。

(C) ループフィルタ (LF)

チャージポンプ (CP) からループフィルタ (LF) に流れ込む（あるいは流れ出す）電流は本来、 $V_{up}(t)$, $V_{down}(t)$ と同じパルス状の電流波形となっている。これをローパスフィルタリングして実効電流 $I_p(t)$ とし、さらに制御電圧 $V_{cont}(t)$ に変換するものとしてループフィルタ (LF) が用いられる。ループフィルタ (LF) の構成は収束性（定常誤差、収束時間）、スプリアス特性およびシステムの安定

性を考慮して決められる。

図 7.6(a), (b) に PLL シンセサイザに一般的に用いられるループフィルタ (LF) の構成例を示す。(a) の構成は安定性の点では問題ないが、収束時間が若干長いといわれる。それに対して、(b) の構成は安定性を若干犠牲にするが、収束時間、スプリアス特性を改善することができるものである。

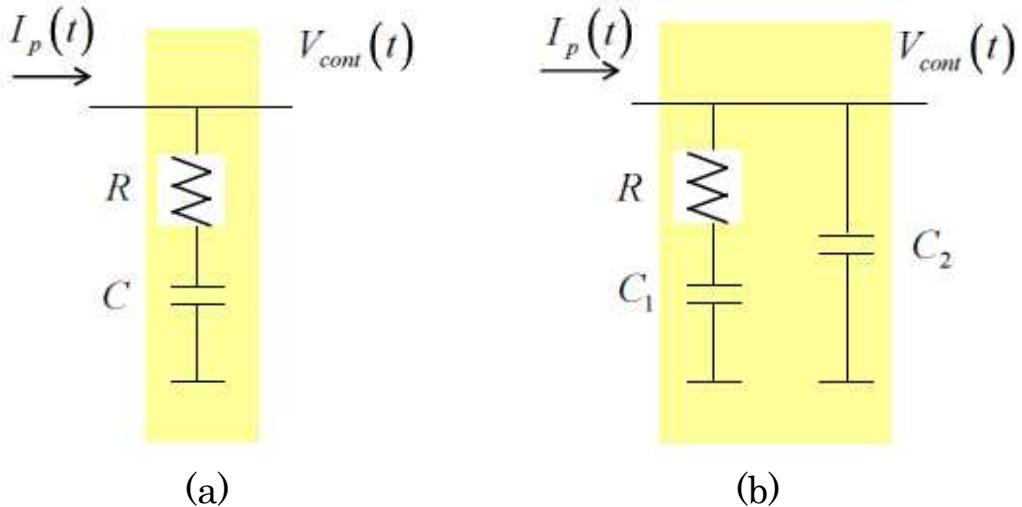


図 7.6 ループフィルタ (LF) の構成例

なお、以下では、解析の容易さ、見通しの良さを考慮して、図 7.6(a) の構成のループフィルタ (LF) を用いて具体的な解析、検討を行う。図 7.6(a) の構成のループフィルタ (LF) の時間領域の伝達関数 $f(t)$ をあえて求めると次式のようにあらわせる。

$$\left. \begin{aligned} V_{cont}(t) &= f(t) \otimes I_p(t) = \int^t f(\tau) I_p(t-\tau) d\tau \\ f(t) &= R\delta(t) + \frac{1}{C} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

しかし、後述するように PLL の解析はラプラス変換した S 領域で行うので、ループフィルタ (LF) の伝達関数はあらかじめ S 領域で与えるのが普通である。図 7.6(a) の構成のループフィルタ (LF) の場合、S 領域の伝達関数 $F(s)$ は次式のように簡単な形で表わすことができる。

$$\left. \begin{array}{l} V_{cont}(s) = F(s)I_p(s) \\ F(s) = R + \frac{1}{sC} \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

(D) 電圧制御発振器 (VCO)

図 7.7 に電圧制御発振器 (VCO) の制御電圧 V_{cont} と発振周波数 ω_{out} の関係を示す。図において傾き K_o (単位 : $\frac{rad}{V \cdot S}$) は ω_{out} に対する V_{cont} の感度を与えるもので、VCO の利得と呼ばれる。

ω_{out} と V_{cont} の関係は時間 t とは関係なしに測定されるが、PLL の中では、 V_{cont} は時間 t により変化し、 $V_{cont}(t)$ と表わされる。その結果 ω_{out} も時間 t により変化し、 $\omega_{out}(t)$ と表わされる。図から、 $V_{cont}(t)$ と $\omega_{out}(t)$ は次式で関係付けられる。

$$\begin{aligned} \omega_{out}(t) &= K_o V_{cont}(t) + \omega_A \\ &= K_o(V_0 + \Delta V_{cont}(t)) + \omega_A = \omega_0 + K_o \Delta V_{cont}(t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\because \omega_0 = K_o V_0 + \omega_A$$

上式において、定常状態での VCO の発振周波数が ω_0 の場合、式 (7.4) を得た時の考察から、 $V_{cont}(t) = V_0 + \Delta V_{cont}(t)$ の関係を用いている。上式から、定常発振している状態では $V_{cont}(t)$ のなかで時間変動するのは $\Delta V_{cont}(t)$ であると言える。

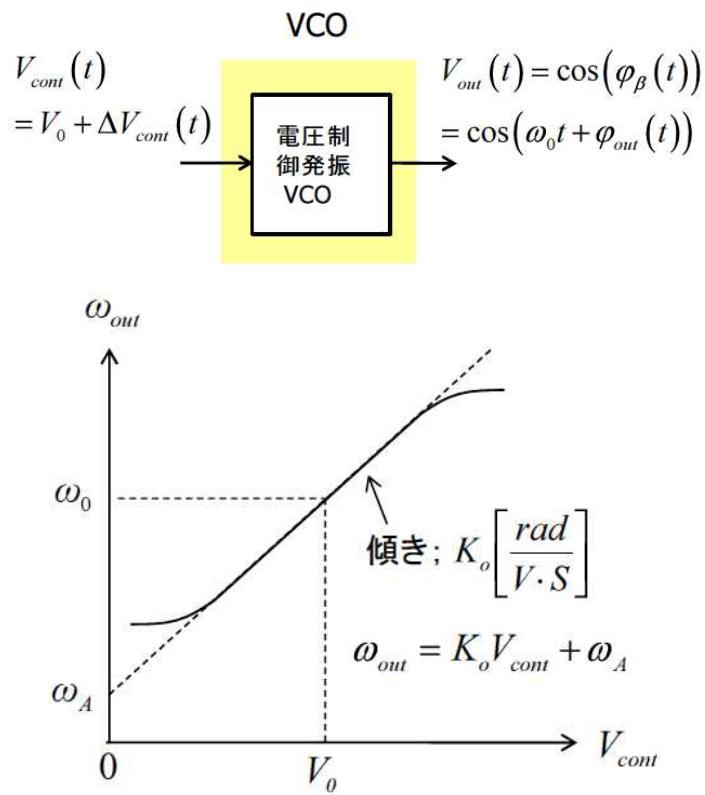


図 7.7 電圧制御発振器 (VCO) の構成と特性

式 (7.7) で与えられる $\omega_{out}(t)$ は VCO の瞬時周波数であるので、これから VCO の累積位相 $\varphi_\beta(t)$ は次式で与えられる。

$$\varphi_\beta(t) = \int^t \omega_{out}(t) dt = \omega_0 t + K_o \int^t \Delta V_{cont}(t) dt \quad (7.8)$$

一方、定常発振している時、 $\varphi_\beta(t)$ は、定常発振周波数 ω_0 と（通常の）瞬時位相 $\varphi_{out}(t)$ を用いて次式であらわせる。

$$\varphi_\beta(t) = \omega_0 t + \varphi_{out}(t) \quad (7.9)$$

式 (7.8) と (7.9) の比較から、瞬時位相 $\varphi_{out}(t)$ に対する伝達関数が次式のよう
に得られる。

$$\varphi_{out}(t) = K_o \int^t \Delta V_{cont}(t) dt \quad (7.10)$$

7.5 伝達関数による特性解析

7.5.1 伝達関数

前節で得られた各要素回路の位相パラメータに関する関係式を以下にまとめ
て示す。関係式は時間領域での関係を与えている。なお、周波数はすでに同期
して、 $\omega_{ref} = \omega'_0 = \omega_0 / M$ (式(7.1)) になっているとする。

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_{ref}(t) - \varphi'_{out}(t) \quad (7.11)$$

$$I_p(t) = K_p \Delta\varphi(t) \quad (7.12)$$

$$\Delta V_{cont}(t) = f(t) \otimes I_p(t) \quad (7.13)$$

$$\varphi_{out}(t) = K_o \int^t \Delta V_{cont}(t) dt \quad (7.14)$$

$$\varphi'_{out}(t) = \varphi_{out}(t) / M \quad (7.15)$$

式 (7.11) ~ (7.15) は時間領域の関係式として与えられるが、これをラプラス
変換し s 領域の関係式を求めると、それぞれ次式のように表わせる。ラプラス
変換については参考図書[5]等を参照のこと。

$$\Delta\Phi(s) = \Phi_{ref}(s) - \Phi'_{out}(s) \quad (7.16)$$

$$I_p(s) = K_p \Delta\Phi(s) \quad (7.17)$$

$$\Delta V_{cont}(s) = F(s) I_p(s) \quad (7.18)$$

$$\Phi_{out}(s) = \frac{K_o}{s} \Delta V_{cont}(s) \quad (7.19)$$

$$\Phi'_{out}(s) = \Phi_{out}(s) / M \quad (7.20)$$

図 7.8 にラプラス変換表示した場合の PLL 構成および位相パラメータを示す。

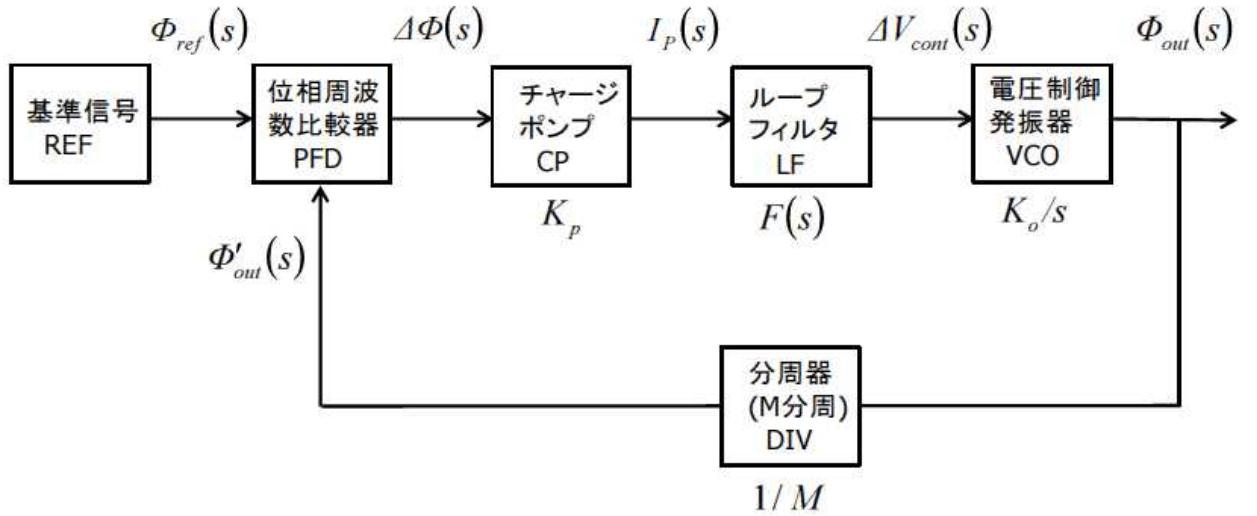


図 7.8 ラプラス変換表示した場合の PLL 構成および位相パラメータ

式 (7.17) ~ (7.20) から、以下の関係式が得られる。

$$\Phi'_{out}(s) = G(s) \Delta \Phi(s) \quad (7.21)$$

$$G(s) = \frac{K}{sM} F(s) \quad (7.22)$$

$$K = K_p K_o \quad (7.23)$$

ここで、 $G(s)$ は開ループ伝達関数、 $K (= K_p K_o)$ はループ利得と呼ばれる。

さらに、式 (7.16), 式 (7.21) から以下の関係式が得られる。

$$\Phi'_{out}(s) = H(s)\Phi_{ref}(s) \quad (7.24)$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{sM}F(s)}{1+\frac{K}{sM}F(s)} \quad (7.25)$$

$$\Delta\Phi(s) = E(s)\Phi_{ref}(s) \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} E(s) &= 1 - H(s) \\ &= \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+\frac{K}{sM}F(s)} \end{aligned} \quad (7.27)$$

ここで、 $H(s)$ は閉ループ伝達関数（システム伝達関数ともよぶ）、 $E(s)$ は誤差応答と呼ばれる。

PLL は $G(s)$, $H(s)$ の関数形により以下のように分類される。

PLL のタイプ；開ループ伝達関数 $G(s)$ の原点 ($s=0$) 上の極の個数

PLL の次数：閉ループ伝達関数 $H(s)$ の分母多項式の最大次数

例えば、以下の場合、タイプは n , 次数は $n+j$ である。

$$G(s) = \frac{\lambda(s+z_a) \cdots (s+z_k)}{s^n(s+p_1) \cdots (s+p_j)} \quad (7.28)$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\lambda(s+z_a) \cdots (s+z_k)}{s^n(s+p_1) \cdots (s+p_j) + \lambda(s+z_a) \cdots (s+z_k)} \quad (7.29)$$

ここで、ループフィルタとして図 7.6 (a) の構成を用いて、具体的に検討を行う。このループフィルタの伝達関数 $F(s)$ は以下で与えられる。

$$F(s) = R + \frac{1}{sC} \quad (7.30) \text{ (式 (7.6) と同じ)}$$

これを代入することにより $G(s)$, $H(s)$, $E(s)$ はそれぞれ、次式のように与えられる。

$$G(s) = \frac{sKRC + K}{s^2MC} \quad (7.31)$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{sKRC + K}{s^2MC + sKRC + K} \quad (7.32)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s^2MC}{s^2MC + sKRC + K} \quad (7.33)$$

上式 (7.31), (7.32) から、この PLL システムはタイプ 2, 2 次となっている。

7.5.2 PLL による位相/周波数特性の収束性、過渡応答

PLL システムが同期している時、基準信号源 (REF) の信号 $V_{ref}(t)$ の位相、周波数に変化があると、位相周波数比較器 (PFD) からの位相差 $\Delta\phi(t)$ が 0 となるように電圧制御発振器 (VCO) の出力信号 $V_{out}(t)$ が変化する。以下、 $V_{ref}(t)$ の位相、周波数が変化するときの $\Delta\phi(t)$ の動作について述べる。

なお、ここでは、タイプ 2, 2 次 PLL システムを考える。式 (7.31) ~ (7.33) で与えられたタイプ 2, 2 次 PLL システムの $G(s)$, $H(s)$, $E(s)$ は、自然周波数 ω_n , ダンピングファクタ ζ を用いて次式のように表わせる。

$$G(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2} \quad (7.34)$$

$$H(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.35)$$

$$E(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.36)$$

ここで、 ω_n （自然周波数）、 ζ （ダンピングファクタ）は次式で与えられる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{MC}} \quad (7.37)$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{KC}{M}} \quad (7.38)$$

(a) ステップ状に位相が変化する場合

時刻 0 に信号 $V_{ref}(t)$ の位相 $\varphi_{ref}(t)$ が次式のように 0 から φ_0 にステップ状に変化することを考える。

$$\varphi_{ref}(t) = \varphi_0 u(t) \quad (7.39)$$

ここで、 $u(t)$ は単位ステップ関数である。この時、 $\varphi_{ref}(t)$ のラプラス変換 $\Phi_{ref}(s)$ は次式で与えられる。

$$\Phi_{ref}(s) = \frac{\varphi_0}{s} \quad (7.40)$$

式 (7.26), (7.36), (7.40) から, $\Delta\varphi(t)$ をラプラス変換した $\Delta\Phi(s)$ は次式で与えられる。

$$\Delta\Phi(s) = E(s)\Phi_{ref}(s) = \frac{\varphi_0 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.41)$$

上式の分母が 0 となる根, すなわち極を求める。分母は s の 2 次式なので根は p_1 , p_2 の 2 個が存在する。 ζ の値により, 以下の 2 つの場合に分けられる。

$$p_{1,2} = -\omega_n \zeta \left(1 \pm j \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \right) \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (7.42)$$

$$p_{1,2} = -\omega_n \zeta \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \right) \quad (1 \leq \zeta) \quad (7.43)$$

これから, 式 (7.41) を部分分数に分解して次式を得る。

$$\Delta\Phi(s) = \frac{\varphi_0}{2} \left[\left(1 - \frac{j}{\sqrt{1/\zeta^2 - 1}} \right) \frac{1}{s - p_1} + \left(1 + \frac{j}{\sqrt{1/\zeta^2 - 1}} \right) \frac{1}{s - p_2} \right] \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (7.44)$$

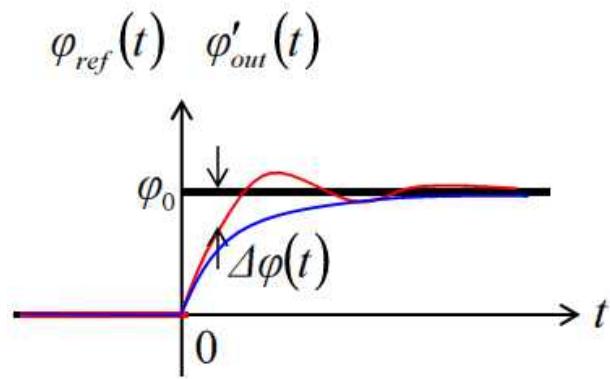
$$\Delta\Phi(s) = \frac{\varphi_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\zeta^2}} \right) \frac{1}{s - p_1} + \frac{\varphi_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\zeta^2}} \right) \frac{1}{s - p_2} \quad (1 \leq \zeta) \quad (7.45)$$

式 (7.44), (7.45) をラプラス逆変換し, 時間領域関数 $\Delta\varphi(t)$ は次式のように求まる。

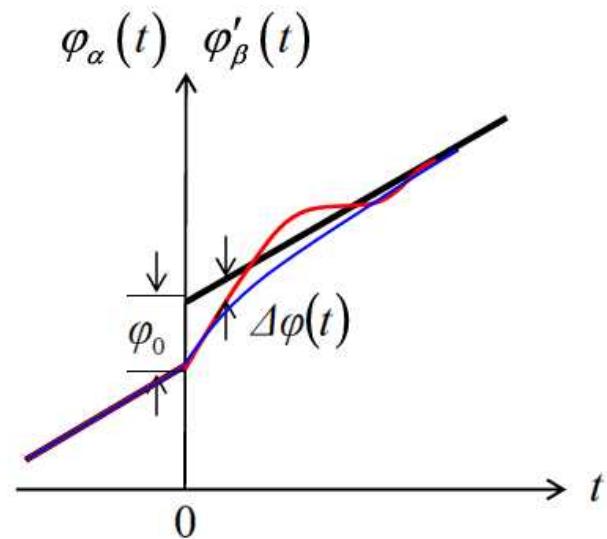
$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(t) &= \frac{\varphi_0}{2} \left[\left(1 - \frac{j}{\sqrt{1/\zeta^2 - 1}} \right) e^{p_1 t} + \left(1 + \frac{j}{\sqrt{1/\zeta^2 - 1}} \right) e^{p_2 t} \right] \\
&= \frac{\varphi_0}{2} \left[\left(1 - \frac{j}{\sqrt{1/\zeta^2 - 1}} \right) e^{-j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} + \left(1 + \frac{j}{\sqrt{1/\zeta^2 - 1}} \right) e^{j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} \right] e^{-\omega_n \zeta t} \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \\
&= \varphi_0 \left[\cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] e^{-\omega_n \zeta t}
\end{aligned} \tag{7. 46}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(t) &= \frac{\varphi_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-1/\zeta^2}} \right) e^{p_1 t} + \frac{\varphi_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-1/\zeta^2}} \right) e^{p_2 t} \\
&= \frac{\varphi_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-1/\zeta^2}} \right) e^{-\omega_n \zeta \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \right) t} + \frac{\varphi_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-1/\zeta^2}} \right) e^{-\omega_n \zeta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \right) t} \quad (1 \leq \zeta)
\end{aligned} \tag{7. 47}$$

式 (7. 46), (7. 47) はいずれも $t \rightarrow \infty$ の時, $\Delta\varphi(t) \rightarrow 0$ となる。すなわち, 位相差 $\Delta\varphi(t)$ は 0 に収束する。図 7.9(a) に瞬時位相 $\varphi_{ref}(t)$, $\varphi'_{out}(t)$ の様子を, (b) に 累積位相 $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi'_\beta(t)$ の様子をそれぞれ示す。図中, 赤は $(0 \leq \zeta \leq 1)$ の場合, 青は $(1 \leq \zeta)$ の場合を示している。 ζ の値に応じて, $(0 \leq \zeta \leq 1)$ の場合は振動 (リシギング) しながら収束し, $(1 \leq \zeta)$ の場合は単調に収束する。



(a) $\varphi_{ref}(t)$, $\varphi'_{out}(t)$ の収束の様子



(b) $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi'_\beta(t)$ の収束の様子

図 7.9 ステップ位相変化に対する収束の様子

(b) ステップ状に周波数が変化する場合

時刻 0 に信号 $V_{ref}(t)$ の周波数が ω_{ref} から $\omega_{ref} + \omega_{ex}$ にステップ状に変化することを考える。この時、位相 $\varphi_{ref}(t)$ は次式のように与えられる、

$$\frac{d\varphi_{ref}(t)}{dt} = \omega_{ex} u(t) \quad (7.48)$$

この時、 $\varphi_{ref}(t)$ のラプラス変換 $\Phi_{ref}(s)$ は次式で与えられる。

$$\Phi_{ref}(s) = \frac{\omega_{ex}}{s^2} \quad (7.49)$$

これから、 $\Delta\varphi(t)$ をラプラス変換した $\Delta\Phi(s)$ は次式で与えられる。

$$\Delta\Phi(s) = E(s)\Phi_{ref}(s) = \frac{\omega_{ex}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.50)$$

上式の分母が 0 となる根、すなわち極 p_1, p_2 は式(7.42), (7.43)と同じである。

式(7.50)を部分分数に分解すると次式が得られる。

$$\Delta\Phi(s) = \frac{j\omega_{ex}}{2\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left(\frac{1}{s-p_1} - \frac{1}{s-p_2} \right) \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (7.51)$$

$$\Delta\Phi(s) = \frac{\omega_{ex}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{-1}{s-p_1} + \frac{1}{s-p_2} \right) \quad (1 \leq \zeta) \quad (7.52)$$

式 (7.51), (7.52) をラプラス逆変換して時間領域関数 $\Delta\varphi(t)$ は次式のように求まる。

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(t) &= \frac{j\omega_{ex}}{2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}(e^{p_1t} - e^{p_2t}) \\
&= \frac{j\omega_{ex}}{2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left(e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} - e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}\right)e^{-\omega_n\zeta t} \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \\
&= \frac{\omega_{ex}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)e^{-\omega_n\zeta t}
\end{aligned} \tag{7.53}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(t) &= \frac{\omega_{ex}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}(-e^{p_1t} + e^{p_2t}) \\
&= \frac{\omega_{ex}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\left(-e^{-\omega_n\zeta(1+\sqrt{1-1/\zeta^2})t} + e^{-\omega_n\zeta(1-\sqrt{1-1/\zeta^2})t}\right) \quad (1 \leq \zeta)
\end{aligned} \tag{7.54}$$

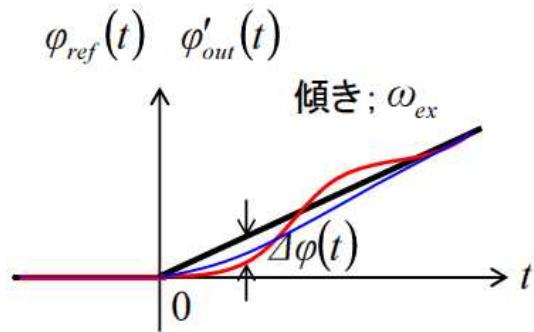
式 (7.53), (7.54) のいずれも $t \rightarrow \infty$ の時 $\Delta\varphi(t) \rightarrow 0$ となる。すなわち、位相差は 0 に収束する。図 7.10(a) に瞬時位相 $\varphi_{ref}(t)$, $\varphi'_{out}(t)$ の様子を、(b) に累積位相 $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi'_\beta(t)$ の様子をそれぞれ示す。図中、赤は $(0 \leq \zeta \leq 1)$ の場合、青は $(1 \leq \zeta)$ の場合を示している。 ζ の値に応じて、 $(0 \leq \zeta \leq 1)$ の場合は振動（リングング）しながら収束し、 $(1 \leq \zeta)$ の場合は単調に収束する。

ところで、開ループ伝達関数 $G(s)$ は原点 ($s = 0$) に 2 個の極を持つ関数になっており、これから、この PLL システムのタイプは 2 であると言える。PLL のタイプは物理的にはどのような意味を持ち、なぜ $G(s)$ により決められるのであるか。例えば、タイプ 2 の場合、 $G(s)$ は次式のように表わせる。

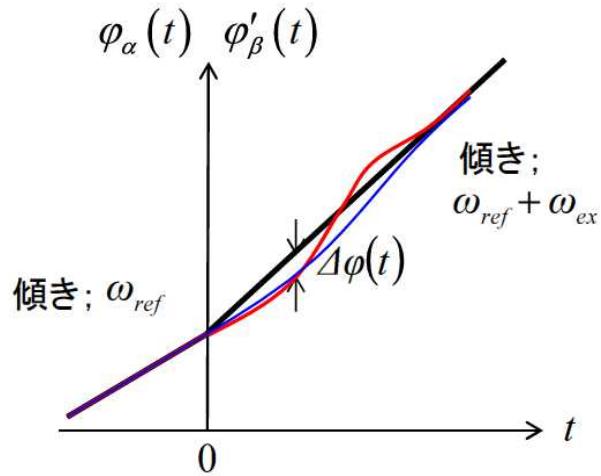
$$G(s) = \frac{1}{s^2} X(s) \tag{7.55}$$

ここで、 $X(s)$ は原点 ($s=0$) に、0点および極を持たない s に関する分数多項式である。この時、式(7.27)から、誤差応答 $E(s)$ は次式のように表わすことができる。

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2} X(s)} = \frac{s^2}{s^2 + X(s)} \quad (7.56)$$



(a) $\varphi_{ref}(t), \varphi'_{out}(t)$ の収束の様子



(b) $\varphi_\alpha(t), \varphi'_\beta(t)$ の収束の様子

図 7.10 ステップ周波数変化に対する収束の様子

次に、基準信号源からの信号 $V_{ref}(t)$ の (a) 位相 $\varphi_{ref}(t)$, (b) 周波数 (位相の 1 次微分) $\frac{d\varphi_{ref}(t)}{dt}$, (c) 位相加速度 (位相の 2 次微分) $\frac{d^2\varphi_{ref}(t)}{dt^2}$ がステップ状に変化することを考える。この時、それぞれの位相のラプラス変換 (a) $\Phi_{ref}(s)$, (b) $\Phi_{ref,\omega}(s)$, (c) $\Phi_{ref,\alpha}(s)$ は以下で与えられる。

$$(a) \quad \Phi_{ref}(s) = \frac{\varphi_0}{s} \quad (7.57)$$

$$(b) \quad \Phi_{ref,\omega}(s) = \frac{\omega_{ex}}{s^2} \quad (7.58)$$

$$(c) \quad \Phi_{ref,\alpha}(s) = \frac{\alpha}{s^3} \quad (7.59)$$

(a), (b), (c) の各場合の位相差の収束値 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi(t)$ はラプラス変換の最終値定理を用いることにより、以下のように与えられる。

$$(a) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \Phi_{ref}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2}{s^2 + X(s)} \frac{\varphi_0}{s} = 0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \Phi_{ref,\omega}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2}{s^2 + X(s)} \frac{\omega_{ex}}{s^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \Phi_{ref,\alpha}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2}{s^2 + X(s)} \frac{\alpha}{s^3} = \frac{\alpha}{X(0)} (\neq 0) \end{aligned} \quad (7.62)$$

タイプ2のPLLの場合、(a) 位相ステップおよび(b) 周波数ステップの変化に対して、位相差は0に収束する ($\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\phi(t) = 0$)。しかし、(c) 位相加速度に対しては収束はするが0にはならない。

以上のこととをタイプ1およびタイプ3のPLLについて適用すると、タイプ1では(a) 位相ステップ変化に対して位相差は0に収束するが、(b) 周波数ステップ変化に対しては収束はするが0にはならず、(c) 位相加速度ステップ変化に対しては ∞ に発散する、これに対して、タイプ3については、いずれのステップ変化(a), (b), (c)に対しても位相差は0に収束するといえる。

ところで、位相、周波数が最終的に収束することと、収束時間とは別のこととなる。ここで、位相、周波数が変動した場合の収束時間について考察する。式(7.46), (7.47), (7.53), (7.54)によれば、位相、周波数の収束の時定数 τ は以下のように与えられる。

$0 \leq \zeta \leq 1$ の場合

$$\tau = \frac{1}{\omega_n \zeta} \quad (7.63)$$

$1 \leq \zeta$ の場合

$$\tau = \frac{1}{\omega_n \zeta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \right)} \geq \frac{1}{\omega_n \zeta} \quad (7.64)$$

さらに ω_n , ζ に関する式(7.37), (7.38)から次式が得られる。

$$\tau = \frac{1}{\omega_n \zeta} = \sqrt{\frac{MC}{K}} \cdot \frac{2}{R} \sqrt{\frac{M}{KC}} = \frac{2M}{RK} \quad (7.65)$$

上式から、ループ利得 K が大きい程、また、分周数 M が小さい程、時定数 τ は小さくなり、収束するまでの時間(セトリング時間)を短く出来ると言える。

7.5.3 PLL システムの安定性判定法

ここでは、PLL システムの安定性の判定方法として、(a) ポーデ線図、および (b) 根軌跡法、をとりあげ、例としてタイプ 2, 2 次 PLL に適用した場合について述べる。

(a) ポーデ線図

PLL における開ループ伝達関数 $G(s)$ と、位相差 $\Delta\Phi(s)(=\Phi_{ref}(s)-\Phi'_{out}(s))$ 、

帰還信号（分周器からの出力信号）の位相 $\Phi'_{out}(s)$ の間に成り立つ式 (7.21) を以下に再掲する。

$$\Phi'_{out}(s) = G(s)\Delta\Phi(s) \quad (7.21)$$

ここで、 $\Delta\Phi(s)$ に含まれる $\Phi'_{out}(s)$ に着目し、これを $\Phi'_{out,1}(s)$ とし、PLL 帰還ループにより得られた $\Phi'_{out}(s)$ を $\Phi'_{out,2}(s)$ すると、式(7.21)は次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned} \Phi'_{out,2}(s) &= G(s)(-\Phi'_{out,1}(s)) \\ &= -G(s)\Phi'_{out,1}(s) \end{aligned} \quad (7.66)$$

上式から、開ループ伝達関数 $G(s)$ が次式を満たす時、発振が成長し系は不安定となる。

$$1 \leq |G(s)| \quad \text{かつ} \quad \angle G(s) = (2n-1)\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad (7.67)$$

ここで、 $s = j\omega$ とおいて、開ループ伝達関数の周波数応答 $G(\omega)$ に書き換えると、

以下の条件を満たす時、発振が成長し系は不安定となる。

$$1 \leq |G(\omega)| \quad \text{かつ} \quad \angle G(\omega) = (2n-1)\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad (7.68)$$

式 (7.34) で与えられるタイプ 2, 2 次 PLL システムの $G(s)$ において、 $s = j\omega$ と置き換えることにより開ループ伝達関数の周波数応答 $G(\omega)$ が以下のように得られる。

$$G(\omega) = \frac{-\omega_n^2 - j2\zeta\omega_n\omega}{\omega^2} \quad (7.69)$$

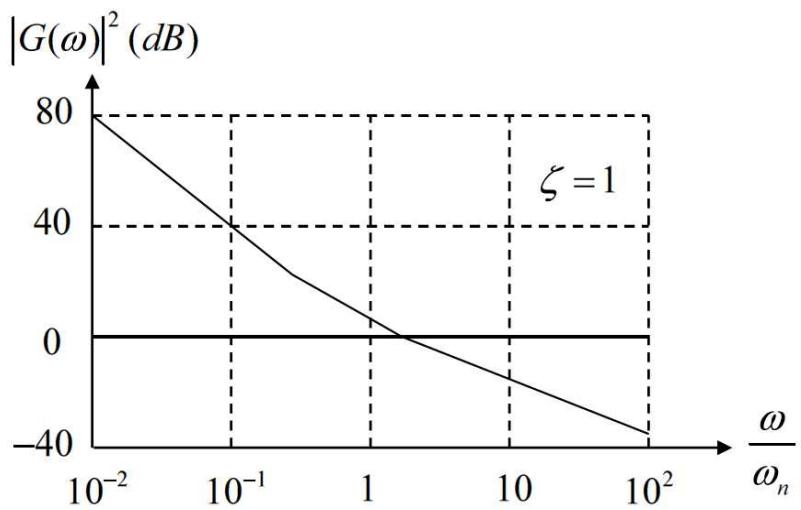
ここで、 $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{MC}}$ (自然周波数), $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{KC}{M}}$ (ダンピングファクタ)

これから

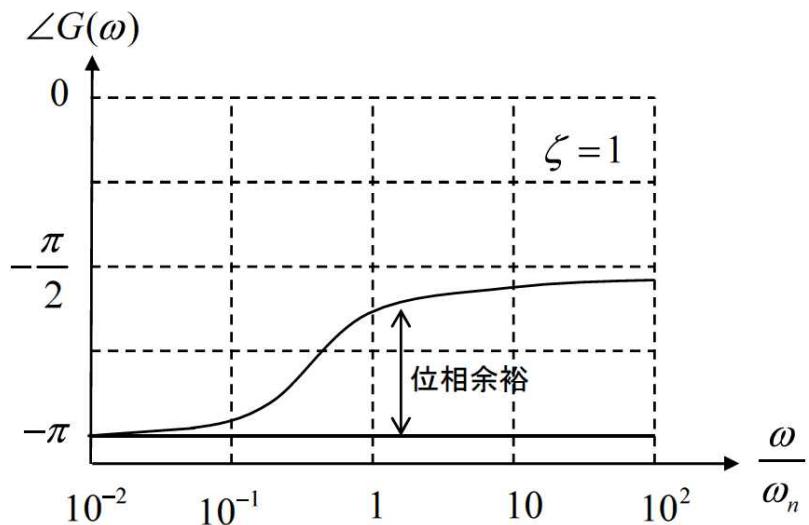
$$|G(\omega)|^2 = \frac{1 + 4\zeta^2\omega^2 / \omega_n^2}{\omega^4 / \omega_n^4} \quad (7.70)$$

$$\angle G(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right) - \pi \quad (7.71)$$

図 7.11 に $\zeta = 1$ として計算した (a) $|G(\omega)|^2$, (b) $\angle G(\omega)$ の周波数特性を示す。この図がボーデ線図である。この場合は式(7.68)の発振条件を満たさず、系は安定なことが判る。



(a) $|G(\omega)|^2$



(b) $\angle G(\omega)$

図 7.11 タイプ 2, 2 次 PLL の $G(\omega)$ のボーデ線図

(b) 根軌跡法

PLL の閉ループ伝達関数 $H(s)$ は基準信号源の位相のインパルス変化（ラプラス変換表示は $\Phi_{ref}(s)=1$ ）を与えた時の閉ループ内のインパルス応答を与えるものである。このことから、伝達関数 $H(s)$ そのものから得られるインパルス応答

の $t \rightarrow \infty$ 時の収束性を調べることにより閉ループの安定動作を判定できる。

ここで、タイプ 2, 2 次 PLL の伝達関数 $H(s)$ を使って具体的に検討する。 $H(s)$ は次式で与えられる。

$$H(s) = \frac{sKRC + K}{s^2MC + sKRC + K} \quad (7.72) \text{ (式(7.32)と同じ)}$$

$H(s)$ の分母（特性方程式と呼ばれる）が 0 となる根、すなわち極を求める。特性方程式は s の 2 次式なので 2 個の根 p_1, p_2 が次式のように得られる。

$$p_{1,2} = \frac{-KCR}{2MC} \pm \frac{KCR}{2MC} \sqrt{1 - \frac{4M}{KCR^2}} \quad (7.73)$$

p_1, p_2 はループ利得 K の値によって以下のように場合分けして表わすことができる。

$$p_{1,2} = \frac{-KCR}{2MC} \pm j \frac{KCR}{2MC} \sqrt{\frac{4M}{KCR^2} - 1} \quad (0 \leq K < \frac{4M}{CR^2}) \quad (7.74)$$

$$p_{1,2} = \frac{-2}{CR} \quad (\text{重根}) \quad (K = \frac{4M}{CR^2}) \quad (7.75)$$

$$p_{1,2} = \frac{-KCR}{2MC} \pm \frac{KCR}{2MC} \sqrt{1 - \frac{4M}{KCR^2}} \quad (\frac{4M}{CR^2} < K) \quad (7.76)$$

K を $0 \rightarrow \infty$ に変化させたときの p_1, p_2 を s 複素平面上にプロットすることにより根軌跡が得られる。図 7.12 にここで取り上げたタイプ 2, 2 次 PLL の $H(s)$ の根軌跡を示す。

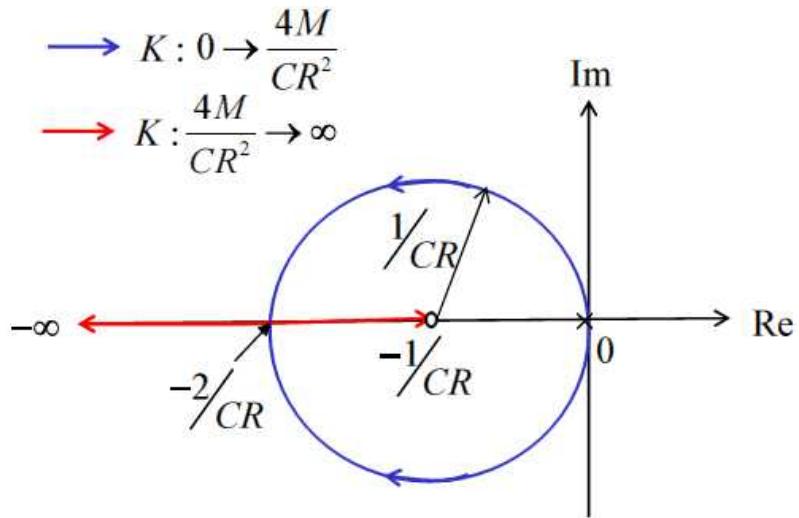


図 7.12 タイプ 2, 2 次 PLL の $H(s)$ の根軌跡

K が $0 \rightarrow \frac{4M}{CR^2}$ と変化するとき, p_1, p_2 は複素共役の根となり, 中心 $-\frac{1}{CR}$, 半径 $\frac{1}{CR}$ の円周上を動く (図の青線)。また, K が $\frac{4M}{CR^2} \rightarrow \infty$ と変化するとき, p_1, p_2 は 2 個の異なる実根となり, 実軸上を動く (図の赤線)。ここで, $K \rightarrow \infty$ の時には, $p_1 \rightarrow -\infty$, $p_2 \rightarrow -\frac{1}{CR}$ に収束する。

根軌跡図を描く際の, テクニックとして, 開ループ伝達関数 $G(s)$ の極およびゼロ点の情報を用いることができる。ここでタイプ 2, 2 次 PLL の $G(s)$ の式を以下に再掲する。

$$G(s) = \frac{sKRC + K}{s^2 MC} \quad (7.77) \quad (\text{式(7.31)と同じ})$$

上式からこの場合, $G(s)$ は原点 ($s = 0$) に 2 個の極を持ち, $s = \frac{-1}{CR}$ と $s \rightarrow \infty$ にゼロ点を持つ。閉ループ伝達関数 $H(s)$ の根軌跡は, $G(s)$ の極を始点とし, ゼロ点を終点とするように描かれる。タイプ 2, 2 次 PLL システムの場合, K をパラメータとした $H(s)$ の根軌跡は, 常に s 複素平面の左半面に描かれており, $H(s)$ をラプラス逆変換して得られるインパルス応答は常に収束し, この PLL システムは K を変化させても常に安定動作すると言える。

7.5.4 PLL 伝達関数の周波数応答と位相雑音補償

s 領域で与えられる伝達関数において、 $s = j\omega$ の変換をすると、伝達関数の周波数応答が得られる。なお、ここで示す周波数 ω は同期周波数 ω_{ref} からの離調周波数であることを注意する。

式 (7.35), (7.36) で与えられるタイプ 2, 2 次 PLL システムの閉ループ伝達関数 $H(s)$ および誤差応答 $E(s)$ において、 $s = j\omega$ とすることにより次式が得られる。

$$H(\omega) = \frac{j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (7.78)$$

$$E(\omega) = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (7.79)$$

$$\text{ここで, } \omega_n = \sqrt{\frac{K}{MC}} \quad (\text{自然周波数}), \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{KC}{M}} \quad (\text{ダンピングファクタ})$$

これから、 $|H(\omega)|^2$, $|E(\omega)|^2$ は次式で与えられる。

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (7.80)$$

$$|E(\omega)|^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^4}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (7.81)$$

図 7.13 に ζ を変化パラメータとした場合の (a) $|H(\omega)|^2$, (b) $|E(\omega)|^2$ を示す。

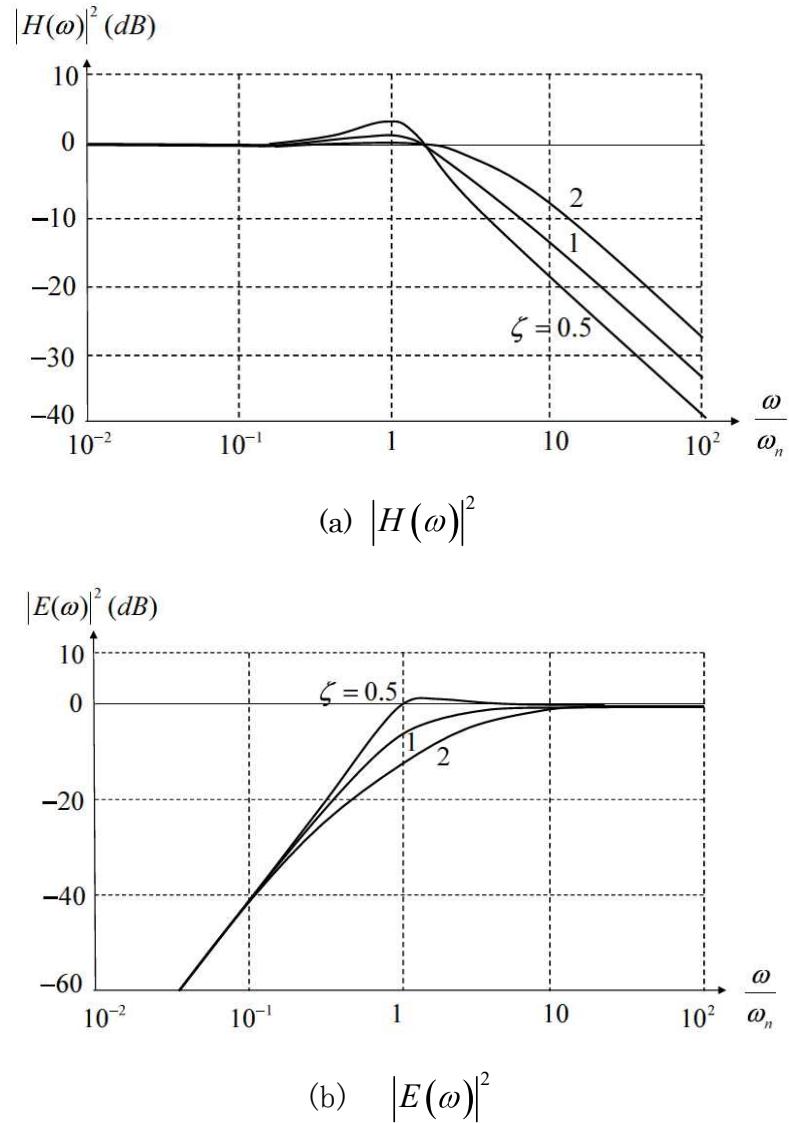


図 7.13 タイプ 2, 2 次 PLL の $|H(\omega)|^2$, $|E(\omega)|^2$

$|H(\omega)|^2$ の 3dB 帯域 ω_{3dB} ($|H(\omega)|^2$ が $\omega=0$ 時に比べて $\frac{1}{2}$ になる周波数) は ω_n ,

ζ の関数として次式で与えられる。

$$\omega_{3dB} \approx \omega_n \sqrt{2(1+2\zeta^2)} \quad (7.82)$$

離調周波数がおよそ ω_{3dB} 以下では PLL システムの負帰還ループが作動することから、これを伝達関数 $H(\omega)$ の 3dB 帯域幅と呼ぶ。帯域幅 ω_{3dB} において位相差は $\Delta\phi(t) = 0$ となり、電圧制御発振器 (VCO) の発振スペクトルは基準信号源に同期したものとなる。一方、離調周波数が ω_{3dB} 以上では電圧制御発振器 (VCO) のスペクトル特性がそのまま見えるようになる。

図 7.14 に雑音を考慮した PLL シンセサイザの構成を示す。

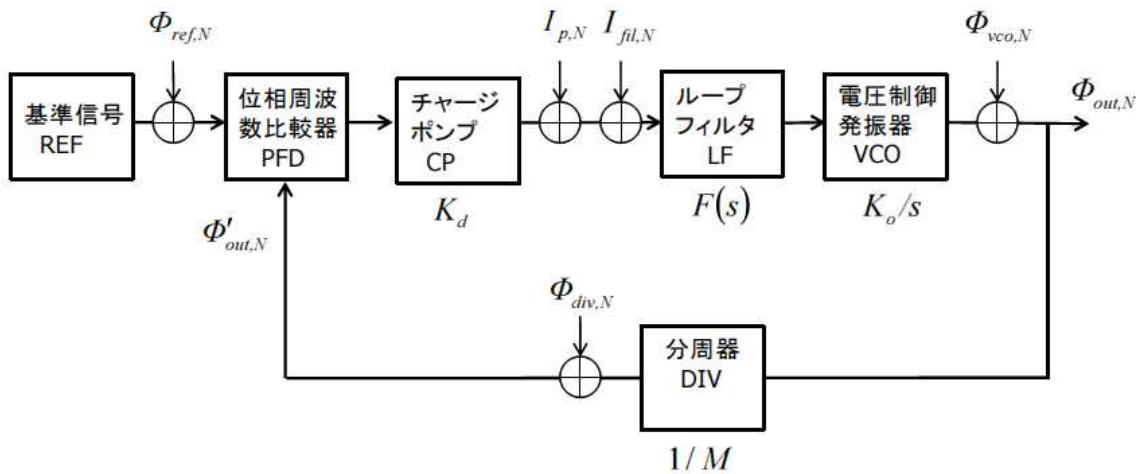


図 7.14 雜音を考慮した PLL シンセサイザ構成

図において、 $\Phi_{ref,N}$ は基準信号源 (REF) の位相雑音、 $I_{p,N}$ はチャージポンプ (CP) で発生する雑音電流、 $I_{fil,N}$ はループフィルタ (LF) で発生する雑音の入力換算雑音電流、 $\Phi_{vco,N}$ は電圧制御発振器 (VCO) で発生する位相雑音、 $\Phi_{div,N}$ は分周器で発生する雑音の位相成分（位相雑音）である。また、 $\Phi_{out,N}$ は PLL システムから出力される信号の位相雑音、 $\Phi'_{out,N}$ は $\Phi_{out,N}$ を M 分周 ($\frac{1}{M}$ 倍) したものと $\Phi_{div,N}$ の和でなり位相周波数比較器 (PFD) に入力される位相雑音である。これらの雑音成分の間には次式の関係がある、

$$\Phi_{out,N} = \left[\left((\Phi_{ref,N} - \Phi'_{out,N}) K_d + I_{p,N} + I_{fil,N} \right) F(s) \right] \frac{K_o}{s} + \Phi_{vco,N} \quad (7.83)$$

$$\Phi'_{out,N} = \frac{\Phi_{out,N}}{M} + \Phi_{div,N} \quad (7.84)$$

式 (7.83), (7.84) から $\Phi'_{out,N}$ を消去して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi_{out,N} &= \frac{\left((\Phi_{ref,N} - \Phi_{div,N}) + \frac{I_{p,N} + I_{fil,N}}{K_d} \right) \frac{KF(s)}{s}}{1 + \frac{KF(s)}{sM}} + \frac{\Phi_{vco,N}}{1 + \frac{KF(s)}{sM}} \\ &= \left((\Phi_{ref,N} - \Phi_{div,N}) + \frac{I_{p,N} + I_{fil,N}}{K_d} \right) MH(s) + \Phi_{vco,N} E(s) \end{aligned} \quad (7.85)$$

ここで, $H(s)$ は式 (7.25) で与えられる閉ループ伝達関数, $E(s)$ は式 (7.27) で与えられる誤差応答である。

個々の構成要素の雑音は互いに無相関であるから, 出力信号の位相雑音 $\Phi_{out,N}$ について次式が得られる。。

$$\begin{aligned} \langle |\Phi_{out,N}|^2 \rangle &= \left(\langle |\Phi_{ref,N}|^2 \rangle + \langle |\Phi_{div,N}|^2 \rangle \right) + \frac{\langle |I_{p,N}|^2 \rangle + \langle |I_{fil,N}|^2 \rangle}{K_d^2} M^2 |H(s)|^2 \\ &\quad + \langle |\Phi_{vco,N}|^2 \rangle |E(s)|^2 \end{aligned} \quad (7.86)$$

ここで, $s = j\omega$ の変換をして次式が得られる

$$\begin{aligned} \langle |\Phi_{out,N}|^2 \rangle &= \left(\left(\langle |\Phi_{ref,N}|^2 \rangle + \langle |\Phi_{div,N}|^2 \rangle \right) + \frac{\langle |I_{p,N}|^2 \rangle + \langle |I_{fil,N}|^2 \rangle}{K_d^2} \right) M^2 |H(\omega)|^2 \\ &+ \langle |\Phi_{vco,N}|^2 \rangle |E(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (7.87)$$

図 7.13 から、周波数 ω が低い領域 ($\omega \leq \omega_{3dB}$) では、 $|H(\omega)|^2 \approx 1$ 、 $|E(\omega)|^2 \approx 0$ であるので、式 (7.87) の第 1 項の寄与が大きい。ここでは出力信号の位相雑音は PLL 制御ループで決まる値となる。一方、周波数 ω が高い領域 ($\omega_{3dB} \leq \omega$) では、 $|H(\omega)|^2 \approx 0$ 、 $|E(\omega)|^2 \approx 1$ であるので、式 (7.87) の第 2 項の寄与が大きくなる。ここでは出力信号の位相雑音は電圧制御発振器 (VCO) の位相雑音特性がそのまま出力にあらわれることになる。

閉ループ伝達関数 $H(\omega)$ の 3dB 帯域 ω_{3dB} の違いによる PLL システムの出力信号の位相雑音 $\langle |\Phi_{out,N}|^2 \rangle$ の様子を図 7.15 に示す。図から、3dB 帯域 ω_{3dB} を最適に選ぶ必要があることがわかる。

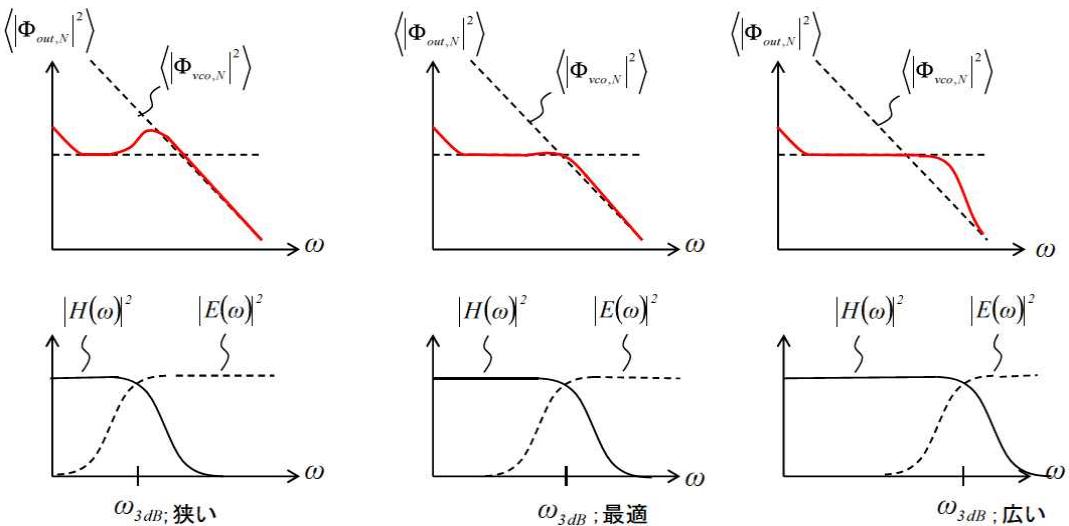


図 7.15 $H(\omega)$ の ω_{3dB} の違いによる位相雑音 $\langle |\Phi_{out,N}|^2 \rangle$ の様子

7.6 RF PLL シンセサイザ

7.6.1 整数分周(Integer-N)PLL シンセサイザ

同期した定常状態では、基準信号源からの信号周波数 ω_{ref} 、電圧制御発振器

(VCO) からの発振周波数 ω_0 、分周数 M' の間には次式の関係がある。

$$\omega_0 = M' \omega_{ref} \quad (7.88)$$

ここで、 M' を整数の範囲で $M_1 \sim M_2$ まで変化させると、発振周波数を

$M_1 \omega_{ref} \sim M_2 \omega_{ref}$ のように変化させることができる。携帯電話システムでは、 ω_{ref}

をチャネル間隔 ω_{ch} とすることにより、 M' を変化させることにより、任意のチ

ャネルで発振する PLL シンセサイザを構成できる。 M' を整数の範囲で $M_1 \sim M_2$

に変化をさせることができる分周器としてパルス・スワロ・カウンタがある。

図 7.16 にその構成を示す。分周数が M と $M+1$ に切り替わる 2 モジュラス・プリスケーラと S カウンタと P カウンタの 2 つのカウンタから成る。初めは 2 モジュラス・プリスケーラの分周数は $M+1$ に設定されている。分周された信号パルスの個数が S 個になると 2 モジュラス・プリスケーラの分周数は M に切り替えられる。その後、分周数 M での分周が $P-S$ 回行われる。 P カウンタでカウントされたパルスがトータルで P になると、パルス・スワロ・カウンタは 1 個のパルスを出力するとともに、回路は初期状態にリセットされる。この間に、電圧制御発振器 (VCO) からの信号パルスの個数 M' は以下のよう与えられる。

$$M' = (P-S)M + S(M+1) = PM + S \quad (7.89)$$

M' が全体の分周数となる。図 7.17 にパルス・スワロ・カウンタのパルスカウントの様子を示す。分周数 M' は PM から $P(M+1)$ の間の整数となる。分周数 M' が整数となる分周器を用いた PLL シンセサイザを整数分周(Integer-N)PLL シンセサイザとよぶ。図 7.18 にその構成を示す。

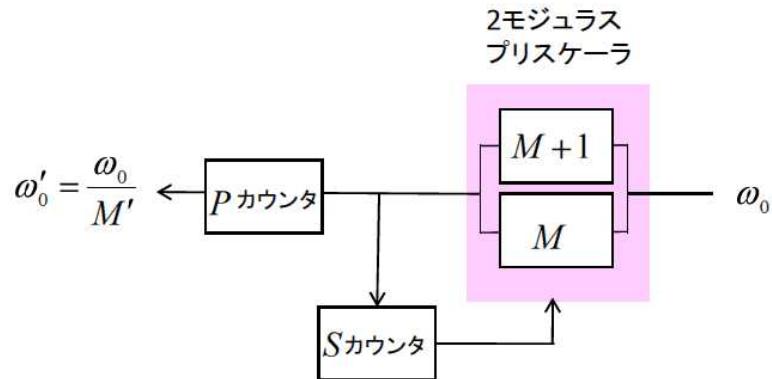
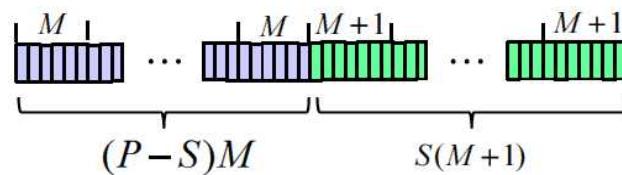


図 7.16 パルス・スワロ・カウンタの構成



$$M' = (P - S)M + S(M + 1) = PM + S$$

図 7.17 パルス・スワロ・カウンタのパルスカウントの様子

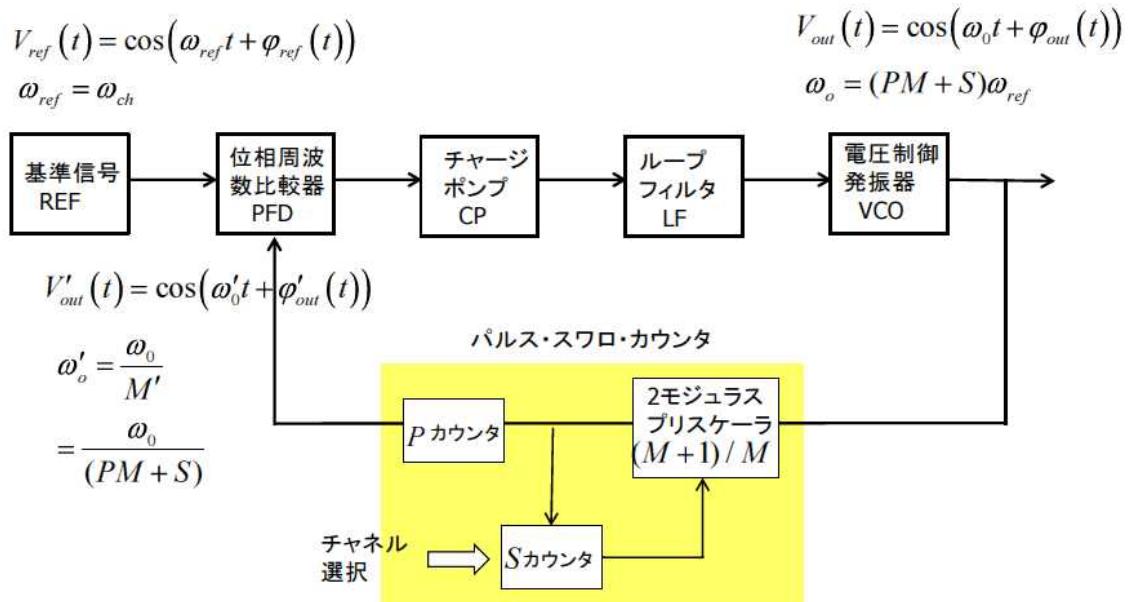


図 7.18 整数分周 PLL シンセサイザの構成

整数分周 PLL シンセサイザはこれまでに広く用いられてきている。しかし、以下の課題がある。整数分周 PLL シンセサイザでは、基準信号源の周波数 ω_{ref} のステップでのみ周波数が切り替わる。このため、チャネル周波数間隔が ω_{ch} のシステムでは、 $\omega_{ref} = \omega_{ch}$ とする必要がある。例えばチャネル間隔 ω_{ch} が 200kHz で ω_0 が 800MHz 帯のシステム（例えば GSM 携帯電話）の場合、分周数 M' は 4,000 という大きな値にする必要がある。分周数が大きくなると、式(7.65)から収束の時定数 τ が増大し、同期のためのセトリング時間が大きくなる問題が出てくる。また、式(7.37)から ω_n が減少し、閉ループ伝達関数 $H(\omega)$ の 3dB 帯域幅 ω_{3dB} が小さくなり、最適な位相雑音補償ができなくなる等の問題も出てくる。

7.6.2 分数分周(Fractional-N)PLL シンセサイザ

電圧制御発振器 (VCO) の信号周波数 ω_0 の 1 周期時間を ΔT とすると、時間 T に $\phi = \frac{T}{\Delta T}$ 個の波が存在する。この波を M 分周するということは、 M 個の周期 ΔT の波を 1 つの波とすること、すなわち、 $M\Delta T$ が分周後の波の 1 周期時間となる。この時、時間 T に含まれる分周後の波の数は $\frac{T}{M\Delta T} = \frac{\phi}{M}$ となる。

ここで、 $T = T_1 + T_2$ とし、 T_1 の間は $M+1$ 分周し、 T_2 の間は M 分周するものとし、分周後の波の個数を考える。図 7.19 にこれをおこなう $M+1/M$ 2 モジュラス分数分周器の構成ブロックを、図 7.20 にパルスカウントの様子を示す。 T_1 の間は $M+1$ 分周するので、分周後の波の個数 N_1 は

$$N_1 = \frac{T_1}{(M+1)\Delta T} = \frac{T}{(M+1)\Delta T} \frac{T_1}{T} = \frac{\phi}{(M+1)} \frac{T_1}{T} \quad (7.90)$$

T_2 の間は M 分周するので、分周後の波の個数 N_2 は

$$N_2 = \frac{T_2}{M\Delta T} = \frac{T}{M\Delta T} \frac{T_2}{T} = \frac{\phi}{M} \frac{T_2}{T} \quad (7.91)$$

これから、 $T = T_1 + T_2$ に含まれる分周後の波の合計個数 N_{total} は以下となる。

$$N_{total} = N_1 + N_2 = \frac{\phi}{(M+1)} \frac{T_1}{T} + \frac{\phi}{M} \frac{T_2}{T} = \frac{\phi}{T} \left(\frac{T_1}{M+1} + \frac{T_2}{M} \right) \quad (7.92)$$

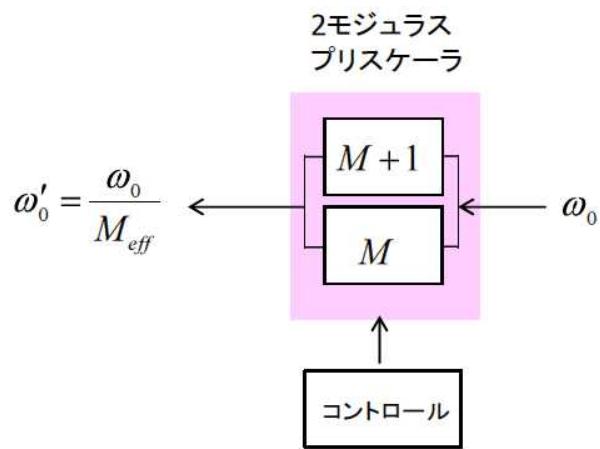


図 7.19 $M+1/M$ 2 モジュラス分数分周器の構成ブロック

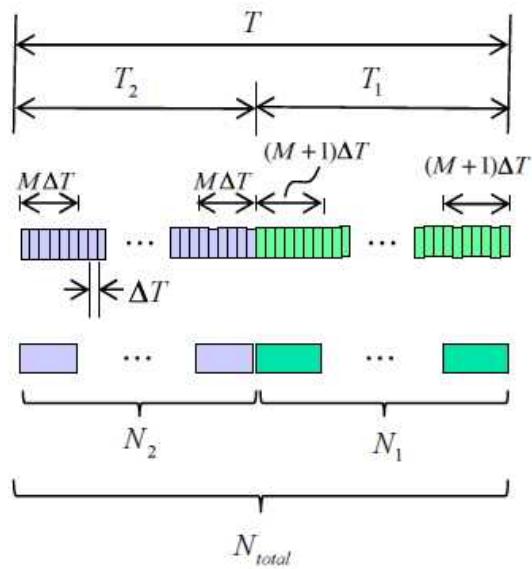


図 7.20 パルスカウントの様子

分周前の波の数が ϕ 個であったものが、分周後の波の数が N_{total} 個となったので、

分周数 M_{eff} は以下となる。

$$M_{eff} = \frac{\phi}{N_{total}} = \frac{1}{\frac{1}{T} \left(\frac{T_1}{M+1} + \frac{T_2}{M} \right)} \quad (7.93)$$

ここで、分周数 M_{eff} は $M \sim M+1$ の間の値をとる有理数となり、次式のように表わすことができる（付録 I 参照）。

$$M_{eff} = M + x \quad (7.94)$$

x は、 T_1, T_2 の割合できる、 $0 \leq x \leq 1$ の分数

このとき、電圧制御発振器(VCO)の信号周波数 ω_0 は、基準信号源の周波数 ω_{ref} 、

分周数 M_{eff} を使って次式で与えられる。

$$\omega_0 = M_{eff} \omega_{ref} = M \omega_{ref} + x \omega_{ref} \quad (7.95)$$

これから、 x の選び方により、 ω_0 は ω_{ref} より狭い周波数ステップで変化させることが可能となる。このような分周数が分数となる分周器を用いた PLL シンセサイザを分数分周(Fractional-N)PLL シンセサイザとよぶ。分数分周 PLL シンセサイザでは、チャネル周波数間隔 ω_{ch} に比べて大きな周波数 ω_{ref} を基準信号源の周波数として用いることができ、分周数を低減できる。この結果、収束の時定数 τ の短縮、閉ループ伝達関数 $H(\omega)$ の ω_{3dB} の増大などが可能となる。

ところで、分数分周 PLL シンセサイザでは、動作原理から、分周数 $M+1$ で動

作する時間 T_1 では位相周波数比較器 (PFD) からの位相誤差 $\Delta\phi$ がプラスの誤差を有し、分周数 M で動作する時間 T_2 では $\Delta\phi$ がマイナスの誤差を有し、周期時間 T が経過するときに累積誤差が 0 となる動作をする。すなわち、位相誤差 $\Delta\phi$ は T を周期として変動する周期関数となり、これにより生じるチャージポンプ (CP) からのパルス電流により、電圧制御発振器 (VCO) の信号周波数は、周期 T の離調周波数のあたりに大きなスプリアスを持つことになる。図 7.21 にこの場合のスペクトルの様子を示す。

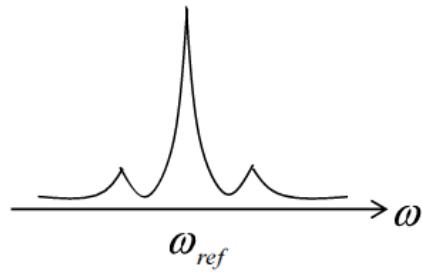


図 7.21 $M+1/M$ 2 モジュラス分数分周器を用いた場合のスペクトル

この問題を改善する方法として、 T_1 , T_2 の割合は同じにするが、それが現れる箇所をランダムにすることがある。図 7.39 に (a) ランダム化制御された分数分周器の構成ブロック、および (b) その場合のスペクトルの様子を示す。

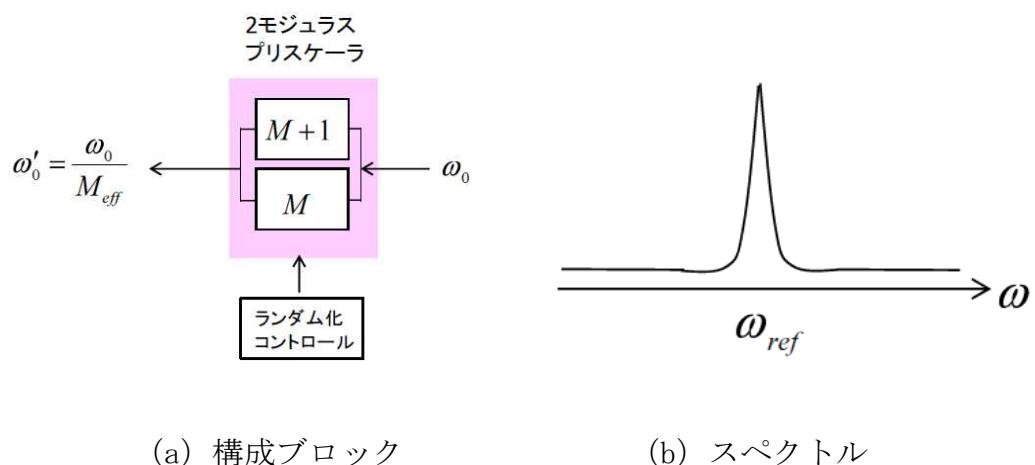


図 7.22 ランダム化制御された $M+1/M$ 2 モジュラス分数分周器

この考え方をさらに進めたものとして、 $\Delta\Sigma$ 変調制御された分数分周器がある。図 7.23 に (a) $\Delta\Sigma$ 変調制御された分数分周器の構成ブロック、および (b) その場合のスペクトルの様子を示す。 ω_{ref} 近傍の雑音・スプリアスは低減される。なお、帯域外に押し出されたスプリアスはループフィルタ (LF) により抑圧される。

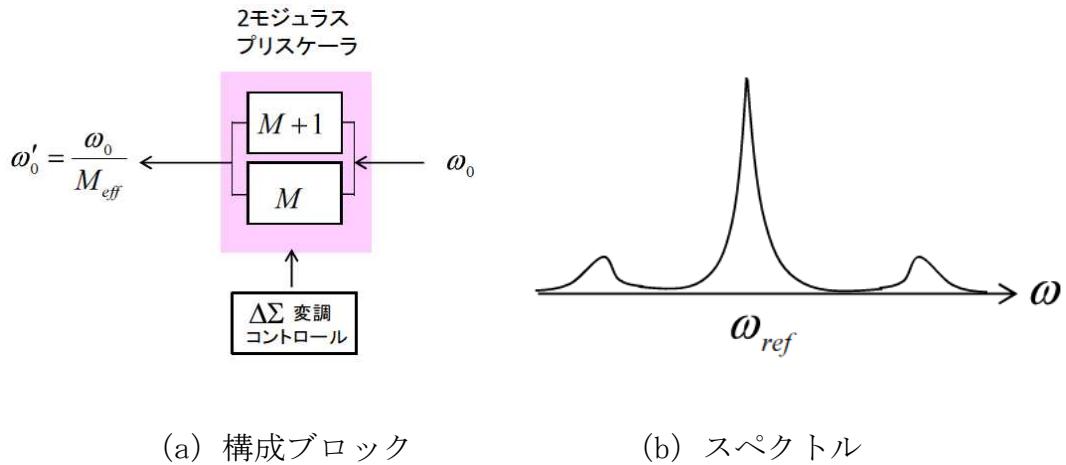


図 7.23 $\Delta\Sigma$ 変調制御された $M+1/M$ 2 モジュラス分数分周器

図 7.24 に、 $\Delta\Sigma$ 変調制御された分数分周器を用いた $\Delta\Sigma$ 分数分周 PLL シンセサイザの構成を示す。実際の分周器は、 $M+1/M$ 2 モジュラス・プリスケーラとカウンタ（分周数 P ）とを組み合わせて構成される。このとき、電圧制御発振器 (VCO) の信号周波数 ω_0 は、分周数 M' ($= PM_{eff} = P(M+x)$)、基準信号源の周波数 ω_{ref} を使って次式で与えられる。

$$\omega_0 = M' \omega_{ref} = PM_{eff} \omega_{ref} = P(M+x) \omega_{ref} \quad (7.96)$$

例えば、2 モジュラスプリスケーラを $M=5$ 、 x の変化量を $\delta x=0.00125$ 、カウンタの分周数を $P=10$ 、 $\omega_{ref}=16MHz$ とすると、信号周波数 ω_0 は周波数ステップ

$\omega_{ch}=200KHz$ で、 $800\sim960MHz$ の範囲で可変できる。この時の分周数は約 50 と

なっている。

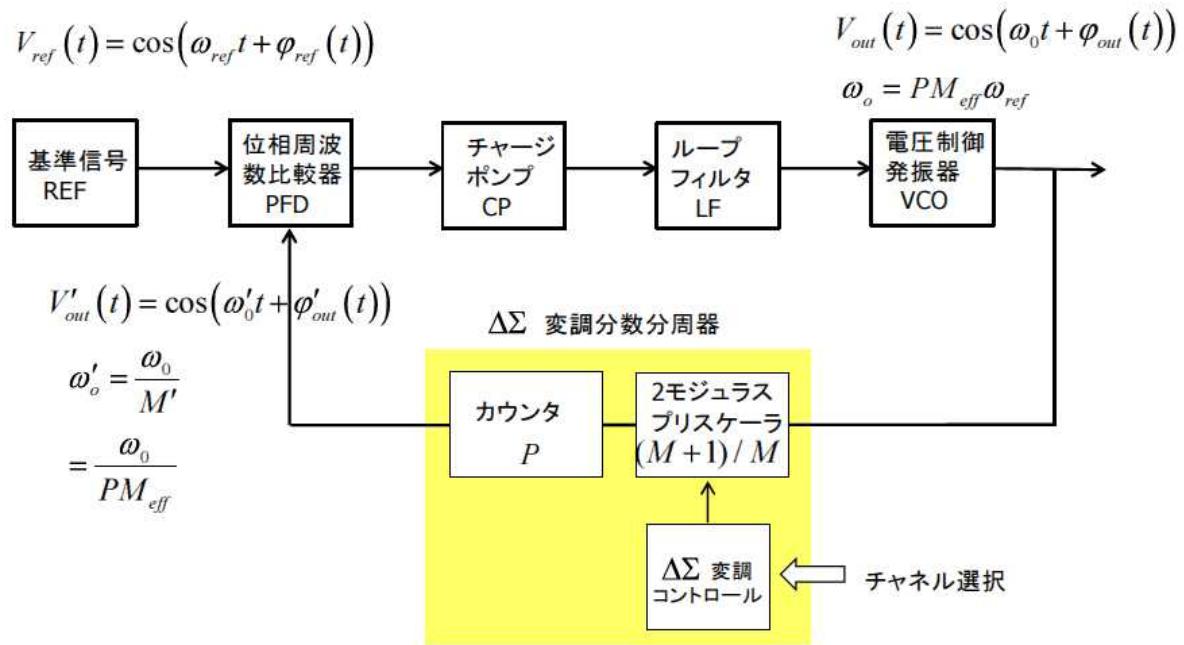


図 7.24 $\Delta\Sigma$ 分数分周 PLL シンセサイザの構成

付録 I 式(7.94)の導出

本文の式 (7.93) を変形して次式を得る。

$$M_{\text{eff}} = \frac{1}{T \left(\frac{T_1}{M+1} + \frac{T_2}{M} \right)} = M \frac{1}{1 - \frac{1}{M+1} \frac{T_1}{T}} = M \frac{1}{1 - \frac{1}{M+1} q} \quad (\text{I. 1})$$

$$\text{ここで, } q = \frac{T_1}{T} \rightarrow 0 \leq q \leq 1 \quad (\text{I. 2})$$

次に,

$$M_{\text{eff}} = M + x \quad (\text{I. 3})$$

とおき, x を q の関数として表わすと, 次式となる。

$$x = -\frac{M(M+1)}{q-(M+1)} - M \quad (\text{I. 4})$$

図 I. 1 に x 対 q のグラフを示す。 $0 \leq q \leq 1$ の範囲において $0 \leq x \leq 1$ となってい る。

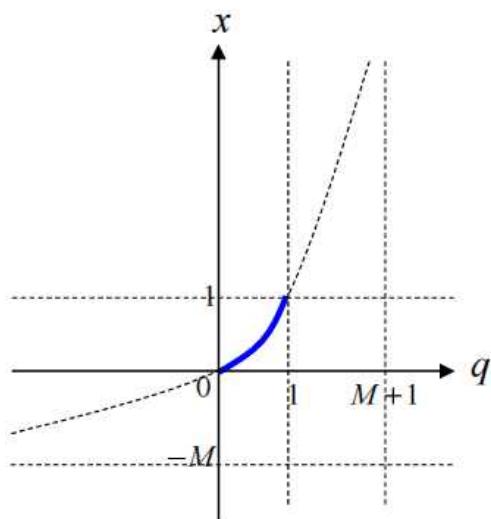


図 I. 1 x 対 q